

Данное методическое пособие к выполнению домашнего задания по функциям комплексного переменного издается в соответствии с учебным планом.

Рассмотрено и одобрено кафедрой прикладной математики 22/XI-1974 г., Методической комиссией факультета ОТ и Учебно-методическим управлением.

Введение

Настоящее методическое пособие предназначено для студентов, изучающих элементы теории функций комплексного переменного. Его цель — помочь студентам научиться решать простейшие задачи тех типов, которые включены в домашнее задание по теории функций комплексного переменного и обычно включаются также в контрольные работы и зачетные билеты.

Указания к решению каждого типа задач снабжены кратким теоретическим введением, в котором приводятся (без доказательств) основные положения и формулы соответствующего раздела курса теории функций комплексного переменного.

В этом пособии даны указания (с подробно разобранными примерами) к решению следующих типов задач:

1. Действия над комплексными числами: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел.

2. Геометрия на комплексной плоскости. Раздел содержит две задачи: 1) построение области плоскости, заданной теми или иными неравенствами; 2) отыскание в плоскости переменного w области, в которую при помощи функции $w = f(z)$ отображается заданная в плоскости z область D , ограниченная контуром L .

3. Вычисление значений заданных функций $f(z)$ при указанных значениях z .

4. Проверка регулярности заданных функций комплексного переменного и отыскание их производных.

5. Восстановление регулярной функции комплексного переменного по ее вещественной или мнимой части (с предварительной проверкой возможности решения предложенной задачи).

6. Определение круга сходимости степенного ряда и исследование его сходимости в заданных точках.

7. Отыскание всех разложений заданной функции по степеням разности $z - a$ (при заданном a) с установлением области пригодности каждого из найденных разложений.

Редактор В.М. Царев

Корректор В.Т. Карасева

Заказ 438

Объем 5 1/4 п.л.

Тираж 3000 экз.

Л-115192 от 20/III-1976 г. Цена 15 коп.

Печ. 1976 г.

Ротапринт МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

8. Отыскание всех изолированных особых точек заданной функции, определение их характера и вычета функции в них; установление, чем для данной функции является бесконечно удаленная точка, и отыскание вычета в ней.

9. Вычисление интеграла от заданной функции комплексного переменного по указанному контуру при помощи теоремы о вычетах или формулы Коши, или формулы n -й производной.

10. Решение простейших задач на конформное отображение: отображение на верхнюю полуплоскость двуугольника (полукруга, сегмента, лунки), сектора, полосы, полуполосы, а также областей плоскости, ограниченных окружностью и касательной к ней, двумя касающимися окружностями и т.п.

В конце пособия помещены все 30 вариантов утвержденного домашнего задания по теории функций комплексного переменного отдельно по каждому из десяти видов задач.

§ 1. Действия над комплексными числами

1. Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел делается по следующим правилам:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + ib_k) = \sum_{k=1}^n a_k + i \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

2. Возведение комплексных чисел в степень с целым положительным показателем степени производится по формуле бинома Ньютона, причем степени i (мнимой единицы) определяются следующими формулами:

$$i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = i^2 = -1; \quad i^{4k+3} = i^3 = -i; \quad i^{4k+4} = i^4 = 1 \\ (r = 1, 2, \dots).$$

Так,

$$(a + ib)^2 = a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + 2iaob - b^2 = (a^2 - b^2) + 2iaob,$$

$$(a + ib)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot ib + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = \\ = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$$

и т.д.

3. При делении комплексных чисел числитель и знаменатель дроби умножаются на комплексное число, сопряженное со знаменателем:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \\ = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

4. Извлечение корня из комплексного числа. Для того чтобы извлечь корень n -й степени (n — целое, положительное) из комплексного числа $z = x + iy$, надо прежде всего представить его в полярной форме

$$z = re^{i\varphi}.$$

Здесь $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (модуль комплексного числа), $\varphi = \arg z$ (главное значение аргумента комплексного числа, т.е. то значение $\arg z$, которое удовлетворяет неравенству $-\pi < \varphi \leq \pi$).

Угол φ определяется либо равенствами $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$; либо формулой $\varphi = \arctg \frac{y}{x} + \pi C$,

где $C = 0$ при $x > 0$; $C = \pi$ при $x < 0, y > 0$; $C = -\pi$ при $x < 0, y < 0$.

Для отыскания всех значений $\sqrt[n]{z}$ надо воспользоваться формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Таким образом, $u = \sqrt[n]{z} = \rho e^{i\psi}$, где $\rho = \sqrt[n]{r}$ (здесь корень понимается в арифметическом смысле), а $\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Так находятся все n различных значений искомого корня.

Таким образом, все n различных значений корня n -й степени из некоторого комплексного числа z изображаются на плоскости комплексного переменного точками, лежащими на одной и той же окружности с радиусом $\rho = \sqrt[n]{|z|}$ и центром в нулевой точке. Поскольку же разности аргументов любой пары соседних (по окружности) из этих точек постоянны и равны $\frac{2\pi}{n}$, эти

точки являются вершинами некоторого правильного n -угольника, вписанного в эту окружность (см. рис. 1, поясняющий пример).

Пример. Даны числа $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Найти: а) $\bar{z}_1 \cdot z_2$; б) $(\frac{z_1}{z_2})^2$; в) $\sqrt[3]{z_1^2}$.

Решение: а) $\bar{z}_1 = \sqrt{3} + i$

$$\bar{z}_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3} + i)(-2 + 2i\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} - 2i + 2i\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2i^2\sqrt{3} = -4\sqrt{3} + 4i = -4(\sqrt{3} - i);$$

$$\text{б) } \bar{z}_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} - i}{-2 - 2i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \frac{(\sqrt{3} - i)(1 - i\sqrt{3})}{1^2 + (\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{8} (\sqrt{3} - i - i\sqrt{3}\sqrt{3} + i^2\sqrt{3}) = \frac{i}{2};$$

$$(\frac{z_1}{z_2})^2 = (\frac{i}{2})^2 = \frac{i^2}{4} = -\frac{1}{4};$$

$$\text{в) } \bar{z}_1 = \sqrt{3} + i; |\bar{z}_1| = 2; \arg \bar{z}_1 = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad (C=0);$$

$$\bar{z}_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}; \bar{z}_1^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{\frac{i\pi}{3} + 2k\pi i};$$

$$u = \sqrt[3]{\bar{z}_1^2} = \sqrt[3]{4} e^{\frac{i\pi}{9} + \frac{2k\pi i}{3}} \quad (k=0, 1, 2).$$

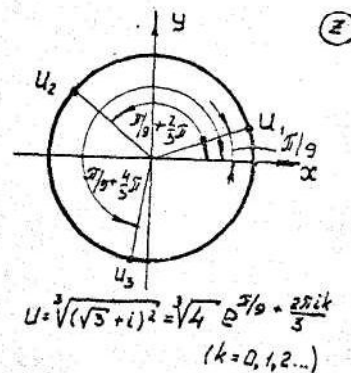


Рис. 1

§ 2. Геометрия на комплексной плоскости

1. Построение области плоскости z , определенной заданными неравенствами. Для решения этих задач используются геометрические истолкования основных элементов комплексного числа z :

$$|z|, \arg z, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z.$$

Так: 1) неравенство $|z-a| \leq r$ определяет точки, лежащие внутри круга радиуса r с центром в точке a плоскости z и на окружности; неравенство $|z-a| > r$ определяет точки, лежащие вне этого круга;

2) неравенство $\alpha < \arg(z-a) < \beta$ определяет точки, лежащие внутри угла с вершиной в точке $z=a$, стороны которого образуют с положительной вещественной полуосью плоскости соответственно углы α и β (напомним, что положительные углы отсчитываются от оси против часовой стрелки, а отрицательные — по часовой);

3) неравенство $\operatorname{Re} z > a$ определяет точки плоскости, лежащие справа от прямой $x=a$, а неравенство $\operatorname{Im} z \leq b$ — точки, лежащие на и под прямой $y=b$;

4) неравенство вида $|z-c_1| + |z-c_2| \leq 2a$ определяет точки, лежащие внутри и на эллипсе с фокусами в точках $z=c_1$ и $z=c_2$ и большой полуосью a ;

5) аналогично неравенство $|z-c_1| - |z-c_2| > 2a$ определяет точки, лежащие внутри той ветви гиперболы с фокусами $z=c_1$ и $z=c_2$ и вещественной полуосью a , которая содержит фокус $z=c_2$;

6) для истолкования более сложных неравенств можно рекомендовать перейти в соответствующем ему предельном равенстве к декартовым координатам x и y или полярным z и φ .

Примеры

1) Построить область плоскости z , определяемую неравенствами

$$\begin{cases} |z-4| + |z+4| \leq 10, \\ |z+4| - |z-4| > 6. \end{cases}$$

Границы, принадлежащие области, изобразить сплошными, не принадлежащие — пунктирными линиями.

Решение. а) Неравенство $|z-4| + |z+4| \leq 10$ определяет точки, лежащие внутри и на эллипсе с фокусами в точках $z = \pm 4$ и большой полуосью $a=5$. Определяем малую полуось этого эллипса $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$.

б) Неравенство $|z+4| - |z-4| > 6$ определяет точки, лежащие внутри правой ветви гиперболы, софокусной с предыдущим эллипсом. Ее вещественная полуось $a=3$, минимая

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

(В том, что данному неравенству удовлетворяют точки, лежащие только внутри правой ветви гиперболы, можно убедиться, подставляя в это неравенство две точки — одну внешнюю и одну внутреннюю, хотя бы $z=0$ и $z=5$:

$$\text{при } z=0 \quad |0+4| - |0-4| = 0 < 6,$$

$$\text{при } z=5 \quad |5+4| - |5-4| = 8 > 6.)$$

По этим данным строим рис. 2.

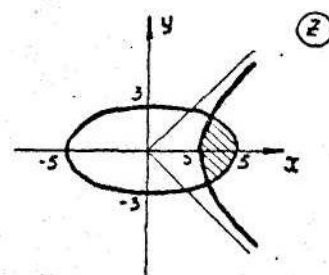


Рис. 2

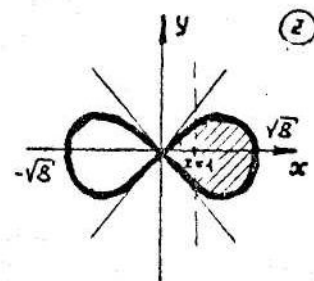


Рис. 3

$$2) \begin{cases} |z^2-4| \leq 4, \\ \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$$

Решение. Кривая $|z^2-4|=4$ — это лемниската. В самом деле,

$$z^2-4 = x^2-y^2-4+2ixy; |z^2-4| = \sqrt{(x^2-y^2-4)^2 + 4x^2y^2} =$$

$$= \sqrt{(x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16 + 4x^2y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16};$$

$$|z^2 - 4| = 4 \text{ или } (x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16 = 16.$$

Таким образом, $(x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)$.

Точки, удовлетворяющие неравенству $|z^2 - 4| \leq 4$, лежат на лемнискате и внутри него.

Неравенство $\operatorname{Re} z > 1$ определяет полуплоскость $x > 1$.
Строим рис. 3.

2. Отыскание области плоскости w , в которую отображается с помощью функции $w = f(z)$ заданная область плоскости z .
Для решения этой задачи надо прежде всего найти уравнение (в декартовых координатах) контура L , ограничивающего заданную в плоскости z область D .

Затем, используя заданную функцию $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, выразить x и y через u и v , внести их значения в уравнение контура L и таким образом найти уравнения контура L_1 плоскости w , в который отображается контур L плоскости z .

После этого остается, используя те или иные элементарные соображения, установить ту область плоскости w , ограниченную контуром L_1 , в которую отображается область D плоскости z .

Примеры

1) Найти область плоскости w , в которую при помощи функции $w = z^2$ отображается область плоскости z , определяемая неравенством $|z^2 - 1| \leq 1$.

Решение. Контур L области D плоскости z определяется уравнением $|z^2 - 1| = 1$ или (см. пример 2 предыдущего пункта.) уравнением $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ (лемниската).

Но $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; таким образом,

$$\sqrt{u^2 + v^2} = |w| = |z|^2 = x^2 + y^2; \quad x^2 - y^2 = u.$$

Поэтому уравнением контура L_1 будет $u^2 + v^2 = 2u$ (окружность с центром в точке $u=1, v=0$ и с радиусом, равным единице $((u-1)^2 + v^2 = 1)$). Точки, лежащие внутри лемниска-

ты, переходят во внутренние точки окружности, так как, например, точке $z=1$ соответствует точка $w=1$.

Таким образом, область плоскости z , определяемая неравенством $|z^2 - 1| \leq 1$, отображается в область плоскости w , определяемую неравенством $|w - 1| \leq 1$.

Примечание. Эта задача может быть решена быстрее и проще, если сразу в исходном неравенстве $|z^2 - 1| \leq 1$ заменить z^2 через w : $|w - 1| \leq 1$.

Это последнее неравенство определяет точки, лежащие внутри и на окружности радиуса 1 с центром в точке $w=1$.
Строим поясняющий рис. 4.

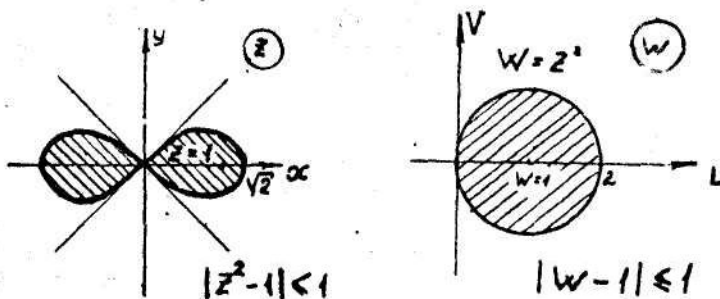


Рис. 4

2) Найти область плоскости w , в которую при помощи функции $w = \sqrt{z}$ отображается область плоскости z , определяемая неравенствами $|\operatorname{Re} z| \leq a$; $|\operatorname{Im} z| \leq a$.

Решение. Контур L области D плоскости z определяется системой уравнений $x = \pm a, y = \pm a$; таким образом, это квадрат с центром в нулевой точке, стороны которого (длиной $2a$) параллельны вещественной и мнимой осям. Из равенства $w = \sqrt{z}$ находим $x = u^2 - v^2; y = 2uv$.

Таким образом, контур L_1 области D_1 плоскости w образован дугами кривых $u^2 - v^2 = a$; $u^2 - v^2 = -a$; $uv = \frac{a}{2}$; $uv = -\frac{a}{2}$; все четыре кривые – равнобочные гиперболы, полуосями которых служат отрезки длины $\sqrt{a}$; ограниченная этими дугами область – криволинейный восьмиугольник с центром в нулевой точке плоскости w (так как внутренняя точка $z=0$ отобража-

ется в точку $W=0$, которая должна также лежать внутри соответствующей области плоскости W).

Строим поясняющий рис. 5.

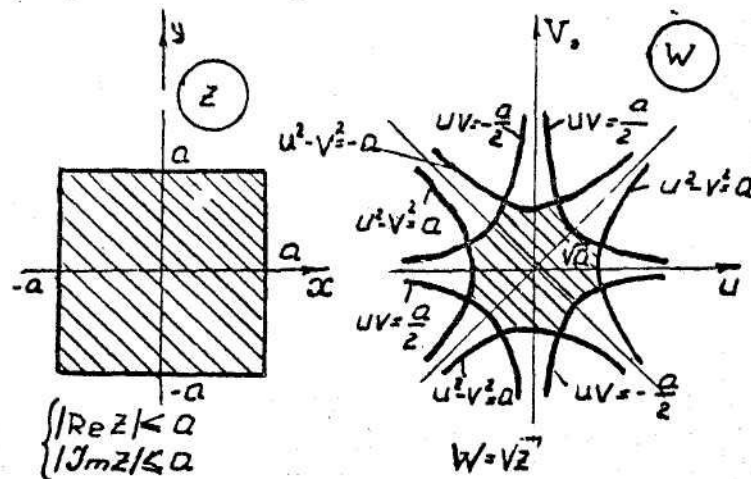


Рис. 5

§ 3. Вычисление значения функции комплексного переменного

Для вычисления значения функции при заданном значении переменного z следует, подставив в выражение функции заданное значение z , отделить вещественную часть от мнимой, пользуясь известными свойствами соответствующей функции.

Ниже приводятся основные формулы, выражающие свойства функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{Ln} z$:

$$1. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$2. e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z; e^{\pm z} = \operatorname{ch} z \pm \operatorname{sh} z.$$

$$3. e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

$$4. \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$5. \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

$$6. \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

$$7. \operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2;$$

$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

$$8. \sin iz = i \operatorname{sh} z; \cos iz = \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z; \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

$$9. \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i \arg z;$$

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \operatorname{Ln}|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Примечание. В формулах 2, 5 и 7 верхнему знаку в левой части соответствует верхний знак в правой, нижнему — нижний.

Примеры

Вычислить значения функций $f(z)$ при данном z .

$$1) f(z) = \operatorname{tg} z; z = \frac{\pi}{4} + 2i.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} 2i}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} 2i} = \frac{1 + i \operatorname{th} 2}{1 - i \operatorname{th} 2} = \\ &= \frac{(1 + i \operatorname{th} 2)^2}{1 + \operatorname{th}^2 2} = \frac{1 - \operatorname{th}^2 2 + 2i \operatorname{th} 2}{1 + \operatorname{th}^2 2} = \\ &= \frac{\operatorname{ch}^2 2 - \operatorname{sh}^2 2 + 2i \operatorname{sh} 2 \operatorname{ch} 2}{\operatorname{ch}^2 2 + \operatorname{sh}^2 2} = \frac{1 + i \operatorname{sh} 4}{\operatorname{ch} 4} = \operatorname{sch} 4 + i \operatorname{th} 4. \end{aligned}$$

$$2) f(z) = e^{z-1}; z = 2 - \frac{\pi i}{3}.$$

Решение. $e^{z-1} = e^{1 - \frac{\pi i}{3}} = e(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{e}{2}(1 - i\sqrt{3}).$

$$3) f(z) = \operatorname{ch} z; z = -2 + \frac{\pi i}{4}.$$

Решение. $\operatorname{ch}(-2 + \frac{\pi i}{4}) = \operatorname{ch}(-2) \operatorname{ch} \frac{\pi i}{4} + \operatorname{sh}(-2) \operatorname{sh} \frac{\pi i}{4} =$

$$= \operatorname{ch} 2 \cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sh} 2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{ch} 2 - i \operatorname{sh} 2).$$

$$4) f(z) = \operatorname{Ln} z; z = -5 - 12i.$$

Решение. $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\operatorname{arg} z + 2k\pi);$

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13;$$

$$\operatorname{arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C \begin{cases} C=0 & \text{при } \operatorname{Re} z > 0; \\ C=\pi & \text{при } \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0; \\ C=-\pi & \text{при } \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Так как $\operatorname{Re} z = -5 < 0$, $\operatorname{Im} z = -12 < 0$, то $C = -\pi$;

$$\operatorname{arg} z = \operatorname{arctg} \frac{-12}{-5} - \pi = \operatorname{arctg} \frac{12}{5} - \pi;$$

$$\operatorname{Ln}(-5 - 12i) = \ln 13 + i \operatorname{arctg} \frac{12}{5} + (2k - 1)\pi i.$$

§ 4. Проверка регулярности заданной функции и отыскание ее производной

Достаточные условия регулярности функции $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ состоят в следующем: а) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — дифференцируемые функции аргументов x и y (т.е. имеют непре-

рывные частные производные по x и y); б) выполнены условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Поэтому для проверки регулярности заданной функции надо отделить в ней вещественную часть от мнимой и, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы по x и y , проверить выполнение условий Коши-Римана.

В тех точках, где функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ не дифференцируемы (в частности, в точках разрыва непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$), функция $w = f(z)$ заведомо нерегулярна.

Для отыскания производной функции $w = f(z)$ (в виде функции от аргумента z) надо воспользоваться формулой $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, положив в правой части $x = z$, $y = 0$.

Таким образом,

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}.$$

Примеры

1) Проверить, будет ли регулярна функция $w = z - \frac{1}{z}$, и найти ее производную.

Решение. Полагая $z = x + iy$, отделяем вещественную часть от мнимой:

$$w = x + iy - \frac{1}{x + iy} = x + iy - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = x - \frac{x}{x^2 + y^2} + i(y + \frac{y}{x^2 + y^2}).$$

Итак, $u(x, y) = x - \frac{x}{x^2 + y^2}$; $v(x, y) = y + \frac{y}{x^2 + y^2}$.

$u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$, в которой обе они претерпевают разрыв непрерывности.

Дифференцируя, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Условия Коши-Римана выполнены: функция $w = z - \frac{1}{z}$ регулярна на всей плоскости z , за исключением точки $z=0$.

Находим

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

В правой части подставляем $x=z, y=0$:

$$f'(z) = 1 + \frac{z^2}{z^4} = 1 + \frac{1}{z^2}.$$

$$2) f(z) = \ln(1+z).$$

Решение. $\ln(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z)$;

$$|1+z| = |x+1+iy| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2};$$

$$u(x, y) = \ln|1+z| = \frac{1}{2} \ln[(x+1)^2 + y^2];$$

$$v = \arg(1+z) = \arctg \frac{y}{x+1} + C;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2} \left[-\frac{y}{(x+1)^2} \right] = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2} = -\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2} \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Условия Коши-Римана выполнены: функция регулярна на всей плоскости, за исключением точки $z = -1$, в которой производная не существует

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \frac{x+1-iy}{(x+1)^2+y^2} \bigg|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \frac{z+1}{(z+1)^2} = \frac{1}{z+1};$$

$$f'(z) = \frac{1}{z+1}.$$

3) Проверить, будет ли регулярна функция $w = \cos i\bar{z}$ (здесь, как всегда, $\bar{z} = x - iy$).

Решение. Имеем $w = \cos i(x - iy) = \cos(y + ix) = \cos y \cos ix - \sin y \sin ix = \cos y \cosh x - i \sin y \sinh x$.

Таким образом, $u(x, y) = \cos y \cosh x$; $v(x, y) = -\sin y \sinh x$; функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы на всей плоскости, Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y \sinh x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin y \cosh x;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin y \cosh x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos y \sinh x.$$

Условия Коши-Римана не выполнены, поэтому функция $w = \cos i\bar{z}$ не регулярна.

§ 5. Отыскание регулярной функции комплексного переменного по ее вещественной или мнимой части

Условием того, что функция двух переменных $u(x, y)$ / или $v(x, y)$ / может служить вещественной (или мнимой) частью регулярной функции комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, является следующее: и вещественная и мнимая части регулярной функции комплексного переменного должны быть гармоническими функциями аргументов x и y , т.е. удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Если это условие не выполнено, то регулярной функции с заданной вещественной (или мнимой) частью не существует. Если оно выполнено, то для отыскания $w=f(z)$ надо сначала найти производную $f'(z)$ либо по формуле

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}$$

(если задана вещественная часть), либо по формуле $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}}$ (если задана мнимая часть). После отыска-

ния $f'(z)$ $f(z)$ восстанавливается интегрированием (поскольку правила отыскания производных и первообразных в комплексной области те же, что и в вещественной). Постоянная интегрирования добавляется в виде Ci или C в зависимости от того, что было задано: вещественная или мнимая часть.

Примеры

1) Может ли функция $u(x,y) = \operatorname{sh} x \sin y$ быть вещественной частью регулярной функции? Если может, восстановить эту функцию.

Решение. Находим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \operatorname{ch} x \sin y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sh} x \cos y; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \operatorname{sh} x \sin y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\operatorname{sh} x \sin y. \end{aligned}$$

Уравнению Лапласа данная функция удовлетворяет, поэтому регулярная функция с такой вещественной частью существует.

Находим $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} =$

$$= (\operatorname{ch} x \sin y - i \operatorname{sh} x \cos y) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = -i \operatorname{sh} z.$$

Отсюда

$$f(z) = -i \int \operatorname{sh} z dz + Ci = -i \operatorname{ch} z + Ci.$$

2) Может ли функция $v(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ служить мнимой частью регулярной функции? Если может, найти эту функцию.

Решение. Находим производные от $v(x,y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Уравнению Лапласа функция $v(x,y)$ удовлетворяет, поэтому регулярная функция с такой мнимой частью существует.

$$\begin{aligned} \text{Находим } f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \\ &= \left(\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{2ix}{x^2+y^2} \right) \Big|_{\substack{x=z \\ y=0}} = \frac{2iz}{z^2} = \frac{2i}{z}. \end{aligned}$$

Таким образом, $f'(z) = \frac{2i}{z}$;

$$f(z) = 2i \ln z + C.$$

3) $u(x,y) = \ln(x+y)$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0.$$

Следовательно, заданная функция не может служить вещественной (или мнимой) частью регулярной функции.

§ 6. Определение круга сходимости степенного ряда

Пусть требуется для заданного степенного ряда

$$C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots + C_n(z-a)^n + \dots$$

определить круг сходимости и исследовать сходимость ряда в заданных точках.

Круг сходимости степенного ряда в комплексной области определяется так же, как и интервал сходимости степенного ряда в вещественной области: например, при помощи признака Даламбера либо при помощи признака Коши (с радикалом), примененных к ряду, образованному из модулей членов данного ряда, т.е. к ряду

$$|c_0| + |c_1||z-a| + \dots + |c_n||z-a|^n + \dots$$

Для исследования сходимости ряда в заданных точках рекомендуется построить на чертеже круг сходимости данного ряда $|z-a| < R$ (центр круга лежит в точке $z=a$, его радиус равен радиусу сходимости ряда) и отметить на этом чертеже положение заданных точек. Для точек, не лежащих на окружности круга сходимости, вопрос решается сразу: известно, что во всякой точке, лежащей внутри круга сходимости, степенной ряд сходится абсолютно, а во всякой точке, лежащей вне круга сходимости, степенной ряд расходится.

По поведению на самой окружности круга сходимости степенные ряды могут принадлежать к одной из следующих трех категорий:

1) во всех точках окружности круга сходимости ряд сходится абсолютно; это будет в том случае, если после подстановки в ряд модулей значения $|z-a|=R$ получается сходящийся знакоположительный ряд;

2) во всех точках окружности круга сходимости степенной ряд расходится; это будет в том случае, если после подстановки в ряд модулей значения $|z-a|=R$ получается расходящийся знакоположительный ряд, расходимость которого обусловлена невыполнением необходимого признака сходимости, т.е. ряд, в котором $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$;

3) в одних точках окружности круга сходимости степенной ряд расходится, в других — сходится условно. Это будет в том случае, если после подстановки в ряд модулей значения $|z-a|=R$ получается расходящийся знакоположительный ряд, для которого, однако, необходимый признак сходимости выполнен, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

В силу этого для исследования сходимости степенного ряда в точках, лежащих на окружности круга сходимости, надо прежде всего определить, к какой из трех категорий принадлежит заданный ряд, т.е. исследовать сходимости ряда, образованного из мо-

дулей членов данного ряда, при $|z-a|=R$ (радиусу сходимости ряда). И лишь в том случае, если данный ряд принадлежит к третьей из указанных категорий, возникает необходимость подставить в ряд значение z , заданное на окружности круга сходимости; после подстановки надо в полученном ряде отделить вещественные слагаемые от мнимых и исследовать сходимости полученных числовых рядов — ряда из вещественных и ряда из мнимых слагаемых членов исходного ряда. Если хоть один из этих рядов будет расходящимся, то расходится и заданный ряд в исследуемой точке; если же оба эти ряда сходятся, то и заданный ряд в этой точке сходится (причем сходимости эта будет условной, так как ряд модулей расходится).

Примеры

1) Определить круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2+n\ln n}$.

Установить, сходится ли ряд в точках $z=1+i$, $z=2i$, $z=2$ и если сходится, то как — абсолютно или условно; сделать поясняющий рисунок.

Решение. Записываем ряд из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-i|^n}{n^2+n\ln n}$$

Применяем признак Коши:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{|z-i|}{\sqrt[n]{n^2+n\ln n}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = |z-i| \quad \left(\text{так как } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2+n\ln n} = 1 \right).$$

Итак, ряд сходится, если $|z-i| < 1$; радиус сходимости $R=1$. Исследуем поведение ряда на окружности круга сходимости, для чего подставляем в ряд модули членов данного ряда $R=1$ вместо $|z-i|$; получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n\ln n}$ — это сходящийся знакоположительный ряд, так как порядок малости члена ряда по отношению к $\frac{1}{n}$ равен двум.

Таким образом, заданный ряд сходится во всех точках окружности круга сходимости и притом абсолютно.

Строим поясняющий рис. 6 и отмечаем на нем заданные точки.

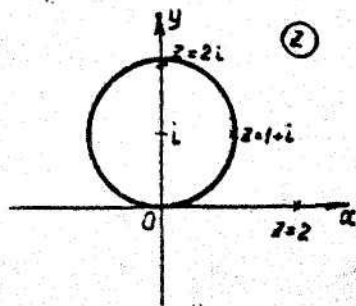


Рис. 6

Применяем признак Коши:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|z-1-i|^2}{4 \sqrt[n]{n+\sin nd}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|z-1-i|^2}{4} \quad \text{так как} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+\sin nd} = 1).$$

Ряд сходится, если $\frac{|z-1-i|^2}{4} < 1$ или $|z-1-i| < 2$.

Таким образом, $R=2$.

Исследуем поведение ряда на границе круга сходимости, для чего в ряд из модулей членов данного ряда вместо $|z-1-i|$ подставляем $R=2$. Получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^n(n+\sin nd)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sin nd}.$$

Это расходящийся знакоположительный ряд (так как порядок общего члена ряда по отношению к $\frac{1}{n}$ равен единице), но $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Поэтому заданный степенной ряд в одних точках окружности круга сходимости сходится (условно), в других расходится.

Делаем поясняющий рис. 7 и отмечаем на нем заданные точки.

Заданные точки $z=1+i$ и $z=2i$ лежат на окружности круга сходимости: в них ряд сходится абсолютно.

Точка $z=2$ лежит вне круга сходимости: в ней ряд расходится.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^{2n}}{4^n(n+\sin nd)};$$

сходится ли (и как) ряд в точках $z=3+i$; $z=0$; $z=-1$?

Решение. Записываем ряд из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-1-i|^{2n}}{4^n(n+\sin nd)}.$$

В точке $z=0$, лежащей внутри круга сходимости, ряд сходится абсолютно.

В точке $z=-1$, лежащей вне круга сходимости, ряд расходится. Точка $z=3+i$ лежит на окружности круга сходимости.

Подставляем ее в исходный ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i-1-i)^{2n}}{4^n(n+\sin nd)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^n(n+\sin nd)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sin nd}, \end{aligned}$$

ряд расходится.

Итак, в точке $z=3+i$ ряд расходится.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-2+i)^n}{3^n \sqrt{n+1}}$; сходится ли (и как) ряд в точках $z=2+2i$; $z=0$; $z=-\frac{1}{2}+i$?

Решение. Записываем ряд из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|z-2+i|^n}{3^n \sqrt{n+1}}.$$

Применяем признак Коши:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|z-2+i|}{3} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|z-2+i|}{3} \quad (\text{так как} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = 1).$$

Ряд сходится, если $\frac{|z-2+i|}{3} < 1$ или если $|z-2+i| < 3$.

Таким образом, радиус сходимости $R=3$.

Исследуем поведение ряда на окружности круга сходимости, для чего подставляем в ряд модулей $R=3$ вместо $|z-2+i|$,

получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$, который расходится, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

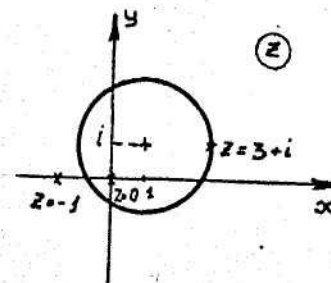
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} = \infty \neq 0.$$


Рис. 7

Следовательно, исходный ряд расходится во всех точках окружности круга сходимости.

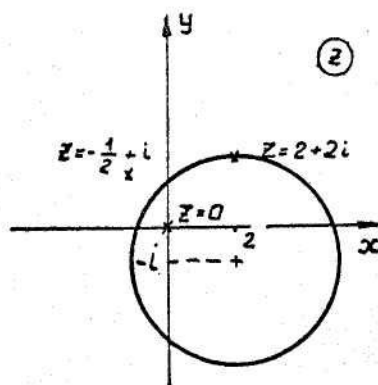


Рис. 8

(так как $|-1/2+i-2+2i| = |-5/2+2i| = \sqrt{25/4+4} = \sqrt{33}/2 > 3$), следовательно, в этой точке ряд тоже расходится.

§ 7. Разложение функций в степенные ряды

Пусть требуется найти все разложения заданной регулярной функции $w = f(z)$ по степеням разности $z-a$ при заданном значении a .

Для решения этой задачи необходимо прежде всего определить все изолированные особые точки данной функции, т.е. все точки, в которых функция перестает быть регулярной. В подавляющем большинстве случаев это те значения аргумента, при которых функция перестает существовать, в частности, значения переменной z , обращающие в нуль один из знаменателей дробей, входящих в выражение функции. Особыми в силу нарушения регулярности являются и те значения z , при которых перестают существовать производные данной функции, начиная с некоторого их порядка (это относится, вообще говоря, к многозначным функциям комплексного переменного).

Делаем поясняющий рис. 8 и отмечаем на нем заданные точки.

Точка $z=0$ лежит внутри круга сходимости: в ней ряд сходится абсолютно.

Точка $z=2+2i$ лежит на окружности круга сходимости: в ней ряд (как доказано) расходится.

Точка $z=-1/2+i$ лежит вне круга сходимости

Так, функции $w = \frac{1}{z^2}$, $w = \frac{\sin z}{z}$, $w = e^{\frac{1}{z}}$, $w = \ln z$ имеют особенности в точке $z=0$; функция $w = \frac{e^z}{1+z^2}$ имеет особенности в точках $z = \pm i$; функция $w = \sqrt[3]{1-z^3}$ имеет особенности в точках $z = 1$, $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (так как в этих точках перестает существовать первая производная этой функции).

После того как все особые точки данной функции найдены, для отыскания всех ее разложений по степеням разности $z-a$ надо построить вспомогательный чертеж. На чертеже необходимо: во-первых, отметить точку $z=a$ и все особые точки заданной функции; во-вторых, построить ряд вспомогательных concentric окружностей с общим центром в точке $z=a$, на которых лежат особые точки данной функции. Эти окружности разобьют всю плоскость на ряд областей, первая (считая от точки $z=a$) область — круг, окружность которого проходит через ближайшую к точке $z=a$ особую точку $f(z)$; дальше идет ряд concentric окружностей, на граничных окружностях которых лежат особые точки $f(z)$, все более и более удаленные от точки $z=a$. Наконец, последней (внешней) областью будет вся часть плоскости, лежащая вне окружности с центром в точке $z=a$, проходящей через наиболее удаленную от точки $z=a$ особую точку $f(z)$, т.е. окрестность бесконечно удаленной точки. Внутри каждой из этих областей $f(z)$ уже не имеет особых точек и остается регулярной. Исключение могут составлять лишь первая область (круг), если сама точка $z=a$ является особой точкой $f(z)$, и последняя внешняя область, если бесконечно удаленная точка плоскости также является особой точкой $f(z)$.

В каждой из этих областей функция $f(z)$ имеет свое разложение по степеням разности $z-a$, которое будет разложением в ряд Лорана для всех областей, начиная со второй. Для первой же области это разложение будет разложением в ряд Тейлора, если точка $z=a$ будет регулярной точкой $f(z)$, и разложением в ряд Лорана, если точка $z=a$ будет особой точкой $f(z)$ (именно последнее разложение есть разложение функции в окрестности особой точки $z=a$; разложение же во внешней последней области есть разложение в окрестности бесконечно удаленной точки).

Само разложение по степеням разности $z-a$ в каждой из перечисленных областей удобнее всего находить, используя из-

вестные из теории рядов разложения в степенные ряды основных элементарных функций и применяя в некоторых случаях дополнительные элементарные преобразования — разложение на элементарные дроби, вынесение некоторых множителей за скобки и т.п. Ниже приводятся разложения в степенные ряды основных элементарных функций, в которых переменная обозначена через u , чтобы подчеркнуть, что этой переменной может служить не только $z-a$ или $\frac{1}{z-a}$, но и вообще любая функция от z .

$$1. e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad (0 \leq |u| < \infty).$$

$$2. \sin u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (0 \leq |u| < \infty).$$

$$3. \cos u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} \quad (0 \leq |u| < \infty).$$

$$4. \operatorname{sh} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (0 \leq |u| < \infty).$$

$$5. \operatorname{ch} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!} \quad (0 \leq |u| < \infty).$$

$$6. (1+u)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n u^n \quad (0 \leq |u| < 1; m - \text{любое вещественное число}; C_m^n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}).$$

$$7. \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n; \quad \frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n \quad (0 \leq |u| < 1).$$

(Это частные случаи предыдущего разложения, особенно часто используемые при разложении функций в степенные ряды.)

$$8. \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n} \quad (0 \leq |u| < 1).$$

Примеры

1. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$ по степеням разности $z-1$.

Решение. Особые точки функции $z=0$, $z=1$, $z=-1$. Делая рис. 9, на котором (поскольку ищутся разложения по степеням разности $z-1$) строим окружности с центром в точке $z=1$, проходящие через точки $z=0$ и $z=-1$.

Эти окружности разбивают всю плоскость на три области, в каждой из которых функция имеет свое разложение по степеням $z-1$. Все три разложения будут разложениями в ряд Лорана, так как точка $z=1$ особая и разложения в ряд Тейлора по степеням $z-1$ не существует.

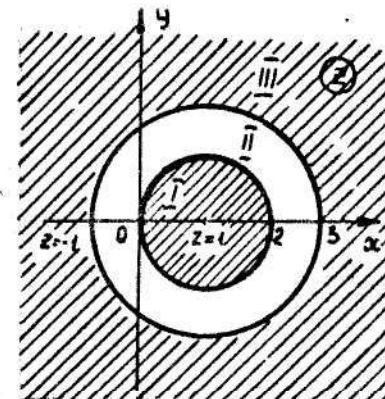


Рис. 9

- Эти области: 1) $0 < |z-1| < 1$,
2) $1 < |z-1| < 2$,
3) $|z-1| > 2$.

Для отыскания этих разложений представляем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z-1} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right). \quad (A)$$

Разложения $\frac{1}{z}$

- 1) $\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{1+(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (|z-1| < 1);$
2) $\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^{n+1}} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} : (|z-1| > 1).$$

Разложения $\frac{1}{z+1}$

$$3) \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} (|z-1| < 2).$$

$$4) \frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} (|z-1| > 2).$$

Используя равенство (A) и разложения 1 и 3, находим разложение искомой функции в I области ($0 < |z-1| < 1$):

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (z-1)^{n-1}. \quad (I)$$

Используя снова равенство (A) и разложения 2 и 3, находим разложение $f(z)$ во II области ($1 < |z-1| < 2$):

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}. \quad (II)$$

Наконец, снова используя равенство (A) и разложения 2 и 4, находим разложение $f(z)$ в III области ($|z-1| > 2$):

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-2^n}{(z-1)^{n+2}}. \quad (III)$$

2. Найти все разложения функции $f(z) = \frac{z-2}{z^2-4z+8}$ по степеням $z-2$.

Решение. Особые точки $f(z)$ – корни уравнения $z^2-4z+8=0$ или $z_{1,2} = 2 \pm 2i$.

Делаем рис. 10, на котором проводим окружность с центром в точке $z=2$, проходящую через точки z_1 и z_2 .

Эта окружность разбивает плоскость на две области:

1) $|z-2| < 2$; разложение в этой области – это разложение в ряд Тейлора, поскольку точка $z=2$ не особая;

2) $|z-2| > 2$; разложение в этой области – разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Ищем эти разложения:

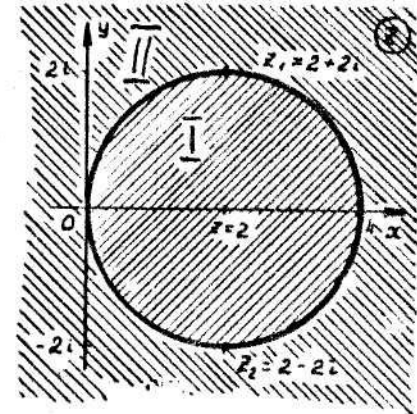


Рис. 10

$$1) f(z) = \frac{z-2}{(z-2)^2+4} = \frac{z-2}{4} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z-2}{2}\right)^2} = \frac{z-2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^{2n+1}}{2^{2n+2}} \quad (|z-2| < 2);$$

$$2) f(z) = \frac{z-2}{(z-2)^2+4} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2}{z-2}\right)^2} = \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z-2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(z-2)^{2n+1}} \quad (|z-2| > 2).$$

3. Найти все разложения функции $f(z) = \sqrt[3]{z^3-6z^2+12z-16}$ по степеням $z-2$ (рассматривается та из ветвей данной многозначной функции, которая на вещественной оси плоскости z принимает вещественные значения).

Решение. Функция $f(z) = \sqrt[3]{z^3-6z^2+12z-16} = \sqrt[3]{(z-2)^3-8}$ имеет три особые точки $z_1 = 4$, $z_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$,

в которых обращается в нуль выражение под радикалом и, следовательно, не существует уже первая производная $f'(z)$.

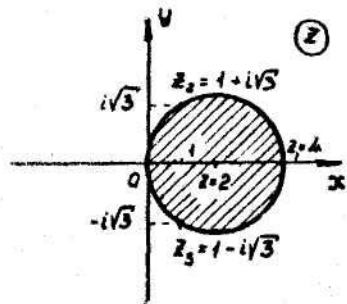


Рис. 11

Делаем рис. 11, на котором проводим окружность с центром в точке $z=2$, проходящую через все три особые точки. Эта окружность разбивает плоскость z на две области:

1) $|z-2| < 2$; разложение в этой области – разложение в ряд Тейлора, так как точка $z=2$ не особая;

2) $|z-2| > 2$; разложение в этой области – разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

Ищем эти разложения, используя разложение бинома:

$$\begin{aligned}
 1) f(z) &= \sqrt[3]{(z-2)^3 - 8} = -2 \left[1 - \left(\frac{z-2}{2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}} = -2 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left[-\left(\frac{z-2}{2} \right)^3 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)}{1 \cdot 2} \left[-\left(\frac{z-2}{2} \right)^3 \right]^2 + \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) \left(-\frac{5}{3} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left[-\left(\frac{z-2}{2} \right)^3 \right]^3 + \dots \right\} = \\
 &= -2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{z-2}{2} \right)^3 - \frac{2}{3 \cdot 6} \left(\frac{z-2}{2} \right)^6 - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \left(\frac{z-2}{2} \right)^9 - \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots - \frac{2 \cdot 5 \dots (3n-4)}{3 \cdot 6 \dots 3n} \left(\frac{z-2}{2} \right)^{3n} - \dots \right] = -2 + \frac{2}{3} \left(\frac{z-2}{2} \right)^3 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \dots (3n-4)}{3 \cdot 6 \dots 3n} \left(\frac{z-2}{2} \right)^{3n} \\
 2) f(z) &= \sqrt[3]{(z-2)^3 - 8} = (z-2) \left[1 - \left(\frac{2}{z-2} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}} = \\
 &= (z-2) \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left[-\left(\frac{2}{z-2} \right)^3 \right] + \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)}{1 \cdot 2} \left[-\left(\frac{2}{z-2} \right)^3 \right]^2 + \dots \right\} = \\
 &= (z-2) - \frac{1}{3} \frac{2^3}{(z-2)^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \dots (3n-4)}{3 \cdot 6 \dots 3n} \frac{2^{3n}}{(z-2)^{3n-1}} \quad (|z-2| > 2).
 \end{aligned}$$

§ 8. Особые точки и вычеты в них

Пусть для заданной регулярной функции комплексного переменного требуется определить все ее изолированные особые точки, установить их характер и найти вычеты в них, а также установить, чем для данной функции является бесконечно удаленная точка, и определить вычет в ней.

Решение первой части задачи – отыскание особых точек – было дано в предыдущем параграфе.

Вторая часть задачи – установление характера особенности – может быть решена либо на основании разложения функции в ряд Лорана в окрестности данной особой точки, либо по поведению функции при приближении к особой точке.

1. Устранимая особая точка. Разложение в ряд Лорана в окрестности устранимой особой точки $z=a$ не содержит отрицательных степеней разности $z-a$. При приближении к устранимой особой точке функция стремится к конечному пределу. Так, например, функции $w = \frac{\sin z}{z}$, $w = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{z^2}$ в точке $z=0$ имеют устранимую особенность:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1; \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} z - 1}{z^2} = \frac{1}{2};$$

иначе,

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

$$\frac{\operatorname{ch} z - 1}{z^2} = \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots$$

2. Существенно-особая точка. Разложение в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки $z=a$ содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями разности $z-a$; при приближении к существенно особой точке функция не стремится ни к какому пределу, бесчисленное множество раз принимая любое, наперед заданное, комплексное значение (кроме, может быть, одного).

Такова будет, например, точка $z=0$ для функций $w=e^{\frac{1}{z}}$,
 $w=z \sin \frac{1}{z}$ и т.п.:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots + \frac{1}{n! z^n} + \dots$$

$$z \sin \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{3! z^2} + \frac{1}{5! z^4} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n}} + \dots$$

3. Полюс. Разложение в ряд Лорана в окрестности полюса $z=a$ содержит лишь конечное число членов с отрицательными степенями разности $z-a$, причем степень разности $z-a$ в старшем из этих членов определяет порядок полюса.

При приближении к полюсу по любому пути модуль функции неограниченно возрастает, иными словами, $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$; порядок полюса может быть также определен следующим образом: в полюсе m -го порядка (m — целое, положительное) существует конечный и отличный от нуля предел для произведения $f(z)$ на $(z-a)^m$:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = A \neq 0.$$

Наконец, в простейших случаях, когда функция может быть представлена в виде

$$w = \frac{\varphi(z)}{(z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \dots (z-z_p)^{k_p}},$$

причем числитель $\varphi(z)$ не имеет особенностей в конечной части плоскости и не обращается в нуль в точках $z=z_1, z=z_2, \dots, z=z_p$, все эти последние точки являются полюсами функции $f(z)$. При этом порядок полюса $z=z_1$ равен k_1 , порядок полюса $z=z_2$ равен k_2 и т.д., т.е. для каждой из этих точек порядок полюса совпадает с показателем соответствующего множителя в знаменателе w .

Примеры

а) Функция $w = \frac{e^z}{(1+z^2)^2}$ имеет точки $z = \pm i$ — полюса второго порядка. В самом деле, $e^{\pm i} \neq 0$ и множители $z \pm i$ стоят в знаменателе w во второй степени, иначе:

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)^2 w = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^z}{(z+i)^2} = -\frac{1}{4} e^i \neq 0;$$

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z+i)^2 w = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^z}{(z-i)^2} = -\frac{1}{4} e^{-i} \neq 0.$$

б) Функция $w = \frac{\sin z}{z^5}$ имеет в точке $z=0$ полюс второго порядка. В самом деле,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 w = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

В данном случае нельзя судить по показателю степени z ответствующего множителя (z^3) в знаменателе w , который равен трем, так как при $z=0$ обращается в нуль числитель $\sin z$.

Примечание. Признаки, по которым можно определить точку разветвления многозначной функции, здесь не приводятся, поскольку таких точек в заданиях нет.

4. Бесконечно удаленная точка. Характер особенности функции в бесконечно удаленной точке определяется разложением функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки: таким разложением может служить разложение по степеням z или по степеням $z-a$ вне круга достаточно большого радиуса с центром в нулевой точке (или в точке $z=a$), внутри которого лежат все особые точки данной функции, находящиеся в конечной части плоскости.

а) Если это разложение будет содержать бесконечное множество членов с положительными степенями z (или $z-a$), то на бесконечности функция имеет существенную особенность (таковы, например, функции $e^z, \sin z, \cos z, sh z, ch z$).

б) Если это разложение будет содержать лишь конечное число членов с положительными степенями z (или $z-a$) и старший из них имеет степень m , то бесконечно удаленная точка будет полюсом порядка m .

в) Наконец, если в этом разложении отсутствуют члены с положительными степенями z (или $z-a$), то функция на бесконечности имеет устранимую особенность.

В частности, если это разложение начинается с членов, со-

держащих $\frac{1}{z}$ (или $\frac{1}{z-a}$) в степени K

$$w = \frac{C-K}{z^K} + \frac{C-K-1}{z^{K+1}} + \dots$$

$$w = \frac{C-K}{(z-a)^K} + \frac{C-K-1}{(z-a)^{K+1}} + \dots,$$

то бесконечно удаленная точка является нулем порядка K для данной функции.

Другими признаками полюса и нуля в бесконечно удаленной точке для функции $w = f(z)$ являются также: для полюса порядка m

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m} = A \neq 0;$$

для нуля порядка K

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^K f(z) = A \neq 0.$$

Примеры

а) Функция $w = \frac{e^z}{(z-a)^2}$ имеет в бесконечно удаленной точке существенную особенность. В самом деле,

$$\frac{e^z}{(z-a)^2} = e^a \frac{e^{z-a}}{(z-a)^2} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^{n-2}}{n!}$$

(это разложение пригодно на всей плоскости за исключением самой точки $z=a$).

б) Функция $w = \frac{z^3}{1+z^2}$ имеет на бесконечности полюсы первого порядка. В самом деле,

$$\frac{z^3}{1+z^2} = \frac{z}{1+\frac{1}{z^2}} = z \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \dots \right)$$

(разложение пригодно вне круга радиусом в единицу с центром в нулевой точке, т.е. при $|z| > 1$).

Иначе,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = 1 \neq 0.$$

в) Функция $w = \frac{1}{z} \sin \frac{1}{z}$ имеет на бесконечности нуль второго порядка:

$$\frac{1}{z} \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right);$$

разложение начинается с члена $\frac{1}{z^2}$; оно пригодно при любом $z \neq 0$.

Иначе,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 w = \lim_{z \rightarrow \infty} z \sin \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \neq 0.$$

Третья часть задачи — определение вычетов в особых точках. Вычетом функции $w = f(z)$ в ее изолированной особой точке $z=a$ называется, деленное на $2\pi i$, значение интеграла от этой функции, взятого в положительном направлении по любому замкнутому контуру, обходящему один раз данную точку $z=a$ (при условии, что на этом контуре и внутри него функция $f(z)$ других особенностей не имеет). Вычет функции $w = f(z)$ в особой точке $z=a$ обозначается символом $\text{Res}_{z=a} f(z)$; таким образом,

$$\text{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

Для определения вычета функции нет необходимости вычислять этот интеграл, так как вычет функции $w = f(z)$ в особой точке $z=a$ равен коэффициенту C_{-1} при $\frac{1}{z-a}$ в разложении данной функции в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\text{Res}_{z=a} f(z) = C_{-1}.$$

Этой последней формулой, как правило, пользуются лишь для определения вычета в существенно особой точке.

Вычет в полюсе m -го порядка, находящегося в точке $z=a$, можно определить, не разлагая функцию в ряд Лорана, при помощи формулы

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)];$$

в частности, для полюса первого порядка (при $m=1$) имеем

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a) f(z)].$$

Если функция $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

и точка $z=a$ является полюсом первого порядка для $f(z)$, причем $\varphi(a) \neq 0$, а для $\psi(z)$ точка $z=a$ служит простым нулем $[\psi(a)=0, \psi'(a) \neq 0]$, то вычет в точке $z=a$ можно определять по еще более удобной формуле

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Что касается вычета функции $w=f(z)$ в бесконечно удаленной точке, то определение его через интеграл остается в силе, но в этом случае в качестве контура, окружающего особую точку, следует взять любой замкнутый конт., на котором и вне которого у функции нет никаких особенностей, кроме самой бесконечно удаленной точки; обходить этот контур при вычислении интеграла надо уже не против, а по часовой стрелке (что и дает положительное направление обхода бесконечно удаленной точки).

Для отыскания вычета функции в бесконечно удаленной точке обычно пользуются тем, что этот вычет равен взятому с обратным знаком коэффициенту C_{-1} при $\frac{1}{z}$ (или $\frac{1}{z-a}$) в разложении функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}.$$

Кроме того, этот вычет можно найти и на основании следующей теоремы: сумма вычетов однозначной регулярной функции во всех ее изолированных особых точках (полюсов и существенных особенностей, число которых предполагается конечным), включая и бесконечно удаленную точку, равна нулю.

В силу этого

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z),$$

где в правой части суммирование распространяется на все особые точки $f(z)$, лежащие в конечной части плоскости.

Следует помнить, что вычет функции в бесконечно удаленной точке может быть отличен от нуля и в том случае, когда в бесконечно удаленной точке функция регулярна.

Примеры

$$1. f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \sin \frac{1}{z}.$$

Особые точки этой функции: 1) $z=0$ — существенно особая точка (так как $\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots$ — разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$ содержит бесконечное множество отрицательных степеней z); 2) $z=1$ — полюс 2-го порядка (так как $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sin \frac{1}{z} = \sin 1$).

Бесконечно удаленная точка для данной функции служит нулем 3-го порядка (так как $\lim_{z \rightarrow \infty} z^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{(1-z)^2} \sin \frac{1}{z} = 1$).

Находим вычеты $f(z)$ в точках $z=0$, $z=1$, $z=\infty$.
1) Вычет в точке $z=0$. Ищем разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$, так как $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = C_{-1}$, т.е. коэффициенту при $\frac{1}{z}$ в этом разложении.

Имеем

$$\frac{1}{(1-z)^2} = (1-z)^{-2} = 1 + 2z + 3z^2 + \dots,$$

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \sin \frac{1}{z} = (1 + 2z + 3z^2 + \dots) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots \right)$$

$$\text{Определяем } C_{-1}: C_{-1} = 1 - \frac{3}{3!} + \frac{5}{5!} - \dots = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots = \cos 1.$$

Итак,

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \cos 1.$$

2) Вычет в точке $z=1$ определяем по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\sin \frac{1}{z} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \cos \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{z^2} \right) = -\cos 1. \end{aligned}$$

3) Вычет в бесконечно удаленной точке равен нулю, поскольку эта точка является нулем выше первого порядка (разложение в ряд Лорана не содержит положительных степеней z и начинается с члена $\frac{1}{z^k}$, где $k > 1$, т.е. $C_{-1} = 0$).
Итак,

$$\operatorname{Res} f(z) = 0.$$

Проверяем по теореме о сумме вычетов

$$\operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z) = 0,$$

т.е.

$$\cos 1 + (-\cos 1) + 0 = 0.$$

Теоремой о сумме вычетов можно было воспользоваться, чтобы более простым способом определить вычет в точке $z=0$.

$$2. \quad f(z) = \frac{1}{(1-z^2)^2} e^{-\frac{1}{z}}.$$

Особые точки: 1) $z=0$ — существенно особая, так как разложение ряд Лорана по степеням z функции $e^{-\frac{1}{z}}$ имеет вид

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

2) $z = \pm 1$ — полюсы 2-го порядка.

В самом деле,

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(1+z)^2} e^{-\frac{1}{z}} = \frac{1}{4} e^{-1};$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(z-1)^2} e^{-\frac{1}{z}} = \frac{1}{4} e.$$

3) Бесконечно удаленная точка является для $f(z)$ нулем 4-го порядка.

В самом деле,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^4 f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^4}{(1-z^2)^2} e^{-\frac{1}{z}} = 1.$$

Отыскание вычетов. 1) Вычет в точке $z=0$. Ищем разложение $f(z)$ по степеням z :

$$\frac{1}{(1-z^2)^2} = 1 + 2z^2 + 3z^4 + 4z^6 + \dots,$$

$$\frac{1}{(1-z^2)^2} e^{-\frac{1}{z}} = (1 + 2z^2 + 3z^4 + \dots) \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right),$$

$$\begin{aligned} C_{-1} &= -1 - \frac{2}{3!} - \frac{3}{5!} - \frac{4}{7!} - \dots = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3+1}{3!} + \frac{5+1}{5!} + \frac{7+1}{7!} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) = -\frac{1}{2} e. \end{aligned}$$

2) Вычет в точке $z=1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z+1)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{z^2} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z+1)^2} - \frac{2}{(z+1)^3} e^{-\frac{1}{z}} \right] = 0. \end{aligned}$$

3) Вычет в точке $z=-1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} [(z+1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z-1)^2} e^{-\frac{1}{z}} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{1}{z^2} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)^3} e^{-\frac{1}{z}} \right] = \frac{1}{2} e. \end{aligned}$$

4) Так как $z = \infty$ является нулем выше первого порядка, то $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Проверка: $\text{Res}_{z=0} f(z) + \text{Res}_{z=1} f(z) + \text{Res}_{z=-1} f(z) + \text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$

или $-\frac{1}{2}e + 0 + \frac{1}{2}e + 0 = 0$.

Как и в предыдущем примере, последним равенством можно было воспользоваться для отыскания более простым способом вычета $f(z)$ в точке $z = 0$.

§ 9. Вычисление интегралов от регулярных функций комплексного переменного по замкнутому контуру

При вычислении интегралов от регулярных функций по замкнутому контуру следует использовать либо теорему о вычетах, либо интегральную формулу Коши, либо формулу n -й производной.

1. Теорема о вычетах. Если на контуре C функция $f(z)$ регулярна, а внутри его имеет неустранимые особые точки (полосы или существенно особые точки) $a_1, a_2, \dots, a_n$, то

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Таким образом, для применения теоремы о вычетах надо:

- убедиться, что на заданном контуре C функция регулярна;
- найти все изолированные особые точки функции, лежащие внутри контура C ;
- определить вычеты функции во всех этих точках.

2. Интегральная формула Коши и ее следствие (формула n -й производной). Если на контуре C и внутри его функция $f(z)$ регулярна, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z-a} = f(a); \quad \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} = f^{(n)}(a).$$

Таким образом, интегральную формулу Коши или ее следствие можно применять только для вычисления интегралов от таких функций, для которых внутри контура C имеется единственная особая точка (и притом полюс того или иного порядка), а на контуре и внутри его (кроме точки a) функция регулярна.

Если эти условия выполнены, то для вычисления $\oint_C f(z) dz$ надо представить подынтегральную функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^K}$, где K — порядок полюса $f(z)$ в точке $z=a$, а $\varphi(z)$ регулярна всюду, на контуре C и внутри его.

Тогда

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{\varphi(z) dz}{(z-a)^K} = \frac{2\pi i}{(K-1)!} \varphi^{(K-1)}(a).$$

Примеры

1. Вычислить $\oint_C \frac{\sin z dz}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}$, где C — окружность $|z| = \pi$.

Решение. Подынтегральная функция на контуре регулярна, внутри его лежат два простых полюса $z = \pm \frac{\pi}{2}$. Применим теорему о вычетах. Для отыскания вычетов воспользуемся (поскольку полюсы простые) формулой

$$\text{Res}_{z=a} f(z) = \text{Res}_{z=a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}, \quad \text{здесь } \varphi(z) = \sin z; \psi(z) = z^2 - \frac{\pi^2}{4};$$

$$\text{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \left. \frac{\sin z}{2z} \right|_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}; \quad \text{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z) = \left. \frac{\sin z}{2z} \right|_{z=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\pi};$$

$$\oint_C \frac{\sin z dz}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}} = 2\pi i \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right) = 4i.$$

2. Вычислить при помощи теоремы о вычетах

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz, \quad \text{где контур } C \text{ — окружность } |z-a| = r.$$

Решение. Внутри контура лежит единственная особая точка подынтегральной функции $z=a$ (полос 3-го порядка). Поэтому

$$\oint_C \frac{e^{2z} dz}{(z-a)^3} = 2\pi i \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} [(z-a)^3 f(z)] =$$

$$= \pi i \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^2}{dz^2} (e^{2z}) = \pi i \cdot 4e^{2a} = 4\pi i e^{2a}.$$

3. Вычислить при помощи интегральной формулы Коши $\oint_C \frac{\sin 2z dz}{z^3 - 1}$, где контур C — окружность $|z-1|=1$.

Решение. Внутри контура C лежит лишь одна (из трех) особая точка подынтегральной функции $z=1$. Поэтому представим интеграл в виде

$$\oint_C \frac{\sin 2z}{z^3 - 1} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-1} dz, \text{ где } f(z) = \frac{\sin 2z}{z^2 + z + 1}.$$

По формуле Коши его значение равно $2\pi i f(1)$, или

$$\oint_C \frac{\sin 2z dz}{z^3 - 1} = 2\pi i \frac{\sin 2}{3}.$$

4. Вычислить при помощи формулы n -й производной

$$\oint_C \frac{\operatorname{sh} z dz}{z(z+2)^3}, \text{ где контур } C \text{ — окружность } |z+2|=1.$$

Решение. Внутри контура лежит один из двух полюсов подынтегральной функции $z=-2$ (при этом полюс 3-го порядка). Представим поэтому интеграл в виде

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z+2)^3} dz, \text{ где } f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z}.$$

По следствию из интегральной формулы Коши имеем

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{(z+2)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(-2).$$

В данном случае $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z}$; $f'(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z} - \frac{\operatorname{sh} z}{z^2}$,

$$f''(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z} - \frac{2\operatorname{ch} z}{z^2} + \frac{2\operatorname{sh} z}{z^3} = \frac{z^2 + 2}{z^3} \operatorname{sh} z - \frac{2\operatorname{ch} z}{z^2}.$$

(дифференцирование выполнено по правилу дифференцирования произведения, а не частного, что в данном случае удобнее),

$$f''(-2) = \frac{6}{-8} \operatorname{sh}(-2) - \frac{2}{(-2)^2} \operatorname{ch}(-2) = \frac{3}{4} \operatorname{sh} 2 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2.$$

Таким образом,

$$\oint_C \frac{\operatorname{sh} z}{z(z+2)^3} dz = \frac{\pi i}{4} (3\operatorname{sh} 2 - 2\operatorname{ch} 2).$$

§ 10. Конформное отображение

Задача заключается в том, чтобы найти регулярную функцию комплексного переменного $w=f(z)$, осуществляющую отображение заданной области плоскости z на верхнюю полуплоскость w . При решении этой задачи следует исходить из общих свойств отображений, осуществляемых регулярными функциями комплексного переменного, и использовать заранее известные отображения, осуществляемые основными элементарными функциями комплексного переменного $z^n, \sqrt[n]{z}, e^z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ и т.д.,

особенно же дробно-линейной функцией $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

Общие свойства отображений, осуществляемых регулярными функциями комплексного переменного. Если область D плоскости z при помощи регулярной функции $w=f(z)$ отображается на область G плоскости w , то:

а) внутренние точки области D переходят во внутренние точки области G ;

б) точки границы области D переходят в точки границы области G ;

в) сохраняется направление обхода границы, иными словами, если граница области D обходится в положительном по отношению к области D направлении (область D остается слева от направления обхода), то соответствующая точка в плоскости w движется вдоль границы области G также в положительном на-

правлении по отношению к области G ;

г) в каждой точке области D , в которой $f'(z) \neq 0$ и $f'(z) \neq \infty$, отображение конформно; иными словами, бесконечно малые линейные элементы, исходящие из данной точки области D , при отображении на плоскость w растягиваются (или сжимаются) в одном и том же отношении (равном значению $|f'(z)|$ в этой точке), и поворачиваются на один и тот же угол (равный $\arg f'(z)$ в этой точке) против часовой стрелки, если $\arg f'(z) > 0$, и по часовой стрелке, если $\arg f'(z) < 0$. В силу этого в любой точке области D , в которой $f'(z) \neq 0$ и $f'(z) \neq \infty$, углы между любыми пересекающимися через эту точку кривыми не изменяются при отображении на плоскость w .

Отображения, осуществляемые основными элементарными функциями комплексного переменного.

а) $w = z^n$ (n — целое положительное число).

Круговой сектор плоскости z с центром в нулевой точке, радиусом r и углом раствора φ , ограниченный лучами $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \beta > \alpha$ ($\varphi = \beta - \alpha$), отображается в круговой сектор плоскости w с центром в нулевой точке, радиусом $R = r^n$ и углом раствора $\psi = n\varphi$, ограниченный лучами $\arg w = n\alpha$ и $\arg w = n\beta$ (рис. 12).

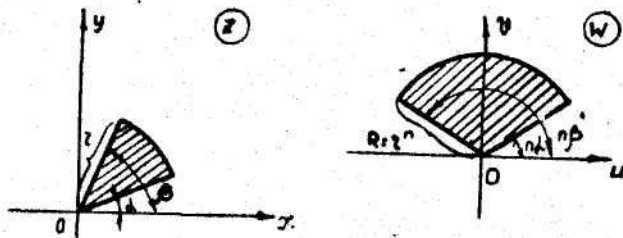


Рис. 12

Так, часть плоскости z , лежащая внутри угла с вершиной в нулевой точке, определяемого неравенствами $0 \leq \arg z \leq \varphi$ (одной из сторон которого служит положительная вещественная полуось), отображается на часть плоскости w , лежащую внутри угла с вершиной в нулевой точке, определяемого неравенствами $0 \leq \arg w \leq n\varphi$.

б) $w = \sqrt[n]{z}$ (n — целое положительное число).

Эта функция осуществляет преобразование, обратное предыдущему.

Примечание. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ многозначна. При конформном отображении обычно используется первая из n ветвей этой многозначной функции, т.е. то значение $\sqrt[n]{z}$,

аргумент которого равен $\frac{1}{n} \arg z$.

в) $w = e^z$.

Эта функция отображает прямоугольник плоскости z , определяемый неравенствами $a \leq x \leq b$, $-\pi < y \leq \pi$, на кольцевой сектор плоскости w , определяемый неравенствами $e^a \leq |w| \leq e^b$, $\alpha \leq \arg w \leq \beta$ (рис. 13).

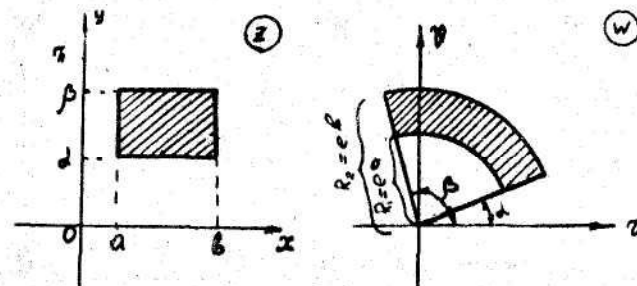


Рис. 13

Наиболее важный частный случай: горизонтальная полоса шириной π , опирающаяся на вещественную ось плоскости z ($-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq \pi$), при помощи показательной функции $w = e^z$ отображается на всю верхнюю полуплоскость плоскости w .

г) $w = \ln z$.

Логарифмическая функция осуществляет отображение, обратное предыдущему. В частности, функция $w = \ln z$ отображает всю верхнюю полуплоскость плоскости z на горизонтальную полосу шириной π , опирающуюся на вещественную ось плоскости w , т.е. на полосу

$$-\infty < u < \infty, \quad 0 \leq v \leq \pi.$$

д) $w = \sin z$.

Функция $w = \sin z$ отображает вертикальную полуполосу шириной π плоскости z , определяемую неравенствами

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y < \infty,$$

на всю верхнюю полуплоскость плоскости w (рис. 14).

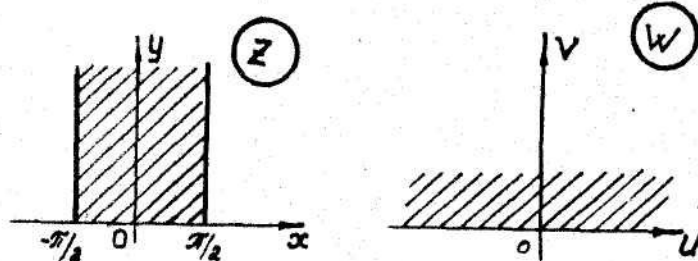


Рис. 14

Функция $w = \cos z$ осуществляет аналогичное отображение со сдвигом вертикальной полуполосы плоскости z на $\frac{\pi}{2}$ влево:

$$-\pi \leq x \leq 0; \quad 0 \leq y < \infty.$$

е) $w = \operatorname{ch} z$.

Эта функция отображает горизонтальную полуполосу шириной π плоскости z , определяемую неравенствами $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq \pi$, на всю верхнюю полуплоскость плоскости w (рис. 15).

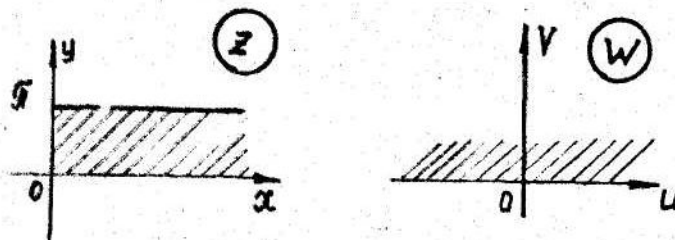


Рис. 15

Аналогичное отображение осуществляет функция $w = i \operatorname{sh} z$ со сдвигом горизонтальной полуполосы плоскости z на $\frac{\pi}{2}$ вниз:

$$0 \leq x < \infty; \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Свойства отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией. $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \kappa \frac{z - a}{z - b}$ ($\kappa = \frac{\alpha}{\gamma}$; $a = -\frac{\beta}{\alpha}$; $b = -\frac{\delta}{\gamma}$).

а) Всякая дробно-линейная функция отображает окружности плоскости z в окружности плоскости w ; при этом прямые следует рассматривать как окружности бесконечно большого радиуса, иными словами, как окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку плоскости.

Так как точки $z = a$ и $z = b$ отображаются соответственно в нулевую и бесконечно удаленную точки плоскости w , то любая окружность плоскости z , проходящая через точку $z = b$, отображается в прямую плоскости w , а окружность плоскости z , проходящая через точку $z = a$ и через точку $z = b$, отображается в прямую плоскости w , проходящую через нулевую точку.

б) Две точки, симметричные относительно некоторой окружности плоскости z , переходят в две точки, симметричные относительно отображения этой окружности в плоскости w .

Примечание. Две точки называются симметричными относительно данной окружности, если они лежат на одной и той же полупрямой, проходящей через центр этой окружности, и произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату ее радиуса; таким образом, если уравнение окружности $|z - a| = R$, то точки z_1 и z_2 будут симметричными относительно данной окружности при

$$|z_1 - a|/|z_2 - a| = R^2; \quad \arg(z_1 - a) = \arg(z_2 - a).$$

Симметрия относительно прямой (две точки, лежащие на равных расстояниях от прямой на одном перпендикуляре к ней) есть частный случай симметрии относительно окружности.

в) Дробно-линейная функция отображает верхнюю полуплоскость плоскости z саму на себя (т.е. на верхнюю же полуплоскость плоскости w) в том случае, когда $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — вещественные числа и $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$.

Примечание. Естественно, таким же свойством будет обладать и дробно-линейное преобразование, параметры которого $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ равны произведению некоторых вещественных чисел на одно и то же комплексное число $A + iB$.

Поэтому, если отображение некоторой области D плоскости z на верхнюю полуплоскость w осуществляется дробно-линейной функцией $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, то такое же отображение будет осуществляться и всякой функцией

$$w_1 = \frac{aw + b}{cw + d},$$

где a, b, c, d — вещественные числа и $ad - bc > 0$.

г) Частные случаи дробно-линейного преобразования:
 $w = z + \alpha$ (α — любое комплексное число). Это преобразование сдвига: вся плоскость сдвигается как целое; величина и направление сдвига определяется вектором, изображающим комплексное число α .

$w = e^{i\alpha} z$. Это преобразование поворота: вся плоскость поворачивается как целое вокруг нулевой точки на угол α (против часовой стрелки при $\alpha > 0$, по часовой стрелке при $\alpha < 0$).

$w = \kappa z$ (κ — вещественное положительное число). Это преобразование подобия с центром в нулевой точке и коэффициентом подобия κ (растяжение при $\kappa > 1$; сжатие при $\kappa < 1$).

$w = \frac{1}{z}$. Это так называемое обратное преобразование; оно состоит из двух последовательных преобразований симметрии: симметрии относительно единичной окружности с центром в нулевой точке и симметрии относительно вещественной оси.

Примеры

1. Отобразить верхний полукруг $|z| \leq 1$ плоскости z на верхнюю полуплоскость (рис. 16).

Решение. При помощи дробно-линейного преобразования отображим точку $z = -1$ в нулевую точку вспомогательной плоскости w_1 , а точку $z = 1$ — в бесконечно удаленную точку плоскости w_1 . Такое преобразование осуществляется функцией

$$w_1 = \kappa \frac{z+1}{z-1} \quad \text{при любом } \kappa.$$

При этом вещественная ось плоскости z и окружность $|z| = 1$ отображаются на прямые плоскости w_1 , проходящие через нулевую точку этой плоскости, и угол между этими прямыми плоскости w_1 будет равен $\frac{\pi}{2}$. Выберем теперь κ так, чтобы отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси плоскости z

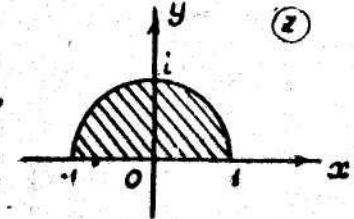


Рис. 16

отобразился на положительную вещественную полуось плоскости w_1 . Для этого достаточно определить κ из условия, что некоторая произвольно выбранная точка отрезка $[-1, 1]$ отобразится в произвольно выбранную точку вещественной положительной полуоси; потребуем для определенности, чтобы точка $z = 0$ отобразилась в точку $w_1 = 1$:

$$1 = \kappa \frac{0+1}{0-1}.$$

Таким образом, $\kappa = -1$; функция $w_1 = -\frac{z+1}{z-1} = \frac{1+z}{1-z}$ отображает верхний полукруг $|z| \leq 1$ плоскости z на всю первую четверть плоскости w_1 ; в самом деле, часть границы полукруга — отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси — отобразилась на всю положительную вещественную полуось $[0, \infty]$ плоскости w_1 . В силу соответствия обхода границ внутренность полукруга отобразилась на часть плоскости w_1 , лежащую над вещественной положительной полуосью, а вторая часть границы полукруга — верхняя полуокружность — отобразилась, в силу сохранения угла между соответствующими частями границы (диаметром и полуокружностью), в прямую, перпендикулярную к вещественной оси плоскости w_1 и лежащую от нее с соответствующей стороны, т.е. в верхнюю мнимую полуось плоскости w_1 .

Остается совершить второй этап преобразования — при помощи новой функции $w = f(w_1)$ отобразить первую четверть плоскости w_1 на всю верхнюю полуплоскость плоскости w . Такой функцией является функция $w = w_1^2$ (см. отображение, осуществляемое степенной функцией $w = z^n$).

Итак окончательно, одной из функций, осуществляющих отображение верхнего полукруга $|z| \leq 1$ плоскости z на всю

верхнюю полуплоскость плоскости w , будет функция

$$w = w_1^2 = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2.$$

Можно найти бесчисленное множество других функций, осуществляющих это же отображение, полагая

$$w_2 = \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{a(1+z)^2 + b(1-z)^2}{c(1+z)^2 + d(1-z)^2},$$

где a, b, c, d — вещественные числа и $ad - bc > 0$.

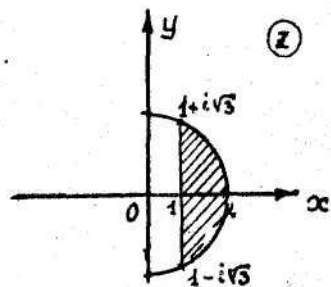


Рис. 17

2. Отобразить на верхнюю полуплоскость сегмент круга радиуса $R=2$ с центром в нулевой точке, изображенный на рис. 17.

Решение. Аналогично предыдущему отобразим точки $z' = 1 - i\sqrt{3}$ и $z'' = 1 + i\sqrt{3}$ плоскости z соответственно в точки $w_1' = 0$ и $w_1'' = \infty$ вспомогательной плоскости w_1 при помощи дробно-линейного преобразования:

$$w_1 = K \frac{z - 1 + i\sqrt{3}}{z - 1 - i\sqrt{3}}.$$

Коэффициент K выберем так, чтобы точка $z''' = 2$ отобразилась в точку $w_1''' = 1$:

$$1 = K \frac{2 - 1 + i\sqrt{3}}{2 - 1 - i\sqrt{3}} = K \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

отсюда

$$K = \frac{2}{-1 + i\sqrt{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Функция $w_1 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{z - 1 + i\sqrt{3}}{z - 1 - i\sqrt{3}}$ отображает заданный сегмент на угол плоскости w_1 , ограниченный вещественной положительной полуосью и полупрямой $\arg w_1 = \frac{\pi}{3}$; в самом деле, дуга сегмента отразилась на вещественную положительную полуось, а хорда сегмента — на полупрямую, образующую с вещественной положи-

тельной полуосью угол в 60° , причем в силу сохранения направления обхода границ угол должен отсчитываться от вещественной полуоси в положительном направлении.

Остается отобразить этот угол плоскости w_1 на всю верхнюю полуплоскость плоскости w , что осуществляется функцией $w = w_1^3$. Так как $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = -1$, то окончательно одной из искомым функций будет функция

$$w = \left(\frac{z - 1 + i\sqrt{3}}{z - 1 - i\sqrt{3}} \right)^3;$$

полагая же $w_2 = \frac{aw+b}{cw+d}$

(a, b, c, d — вещественны, $ad - bc > 0$), находим бесчисленное множество других функций, осуществляющих то же отображение.

3. Отобразить на верхнюю полуплоскость изображенную на рис. 18 лунку, ограниченную дугами двух окружностей. По чертежу нетрудно установить, что угол между дугами окружностей, образующих лунку, в точке их пересечения равен 45° .

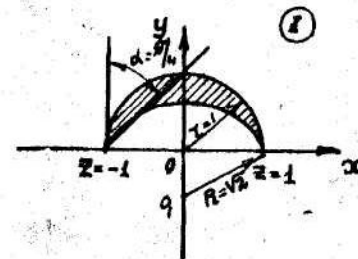


Рис. 18

Решение. Чтобы (аналогично разобранным выше примерам) отобразить дуги окружностей, образующие лунку, в полупрямые, воспользуемся дробно-линейным преобразованием, причем точки $z' = 1$ и $z'' = -1$ отобразим соответственно в точки $w_1' = 0$ и $w_1'' = \infty$ вспомогательной плоскости w_1 :

$$w_1 = K \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Коэффициент K определим, потребовав, чтобы точка $z''' = i$ отобразилась в точку $w_1''' = 1$:

$$1 = K \frac{i - 1}{i + 1} = Ki, \quad K = -i.$$

Приходим к вспомогательной функции $w_1 = -i \frac{z-1}{z+1}$, которая отображает заданную дугку на угол плоскости w_1 , ограниченный вещественной положительной полуосью и полупрямой $\arg w_1 = \frac{\pi}{4}$ (как это следует из соответствия обхода границ и сохранения углов).

Остается "развернуть" этот угол на всю верхнюю полуплоскость, что осуществляется функцией

$$w = w_1^4 = \left(-i \frac{z-1}{z+1}\right)^4.$$

Окончательно одна из искоемых функций

$$w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^4;$$

другие содержатся в формуле

$$w_2 = \frac{aw+b}{cw+d},$$

где a, b, c, d подчинены указанным выше условиям.

4. Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу шириной h , указанную на рис. 19.

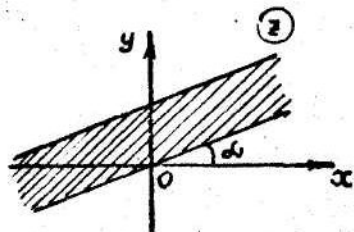


Рис. 19

Решение. При помощи вспомогательной функции $w_1 = e^{-i\alpha} z$ поворачиваем заданную полосу около нулевой точки на угол α по часовой стрелке, чтобы совместить нижнюю границу полосы с вещественной осью плоскости w_1 .

При помощи второй вспомогательной функции $w_2 = \frac{\pi}{h} w_1$ преобразуем полосу шириной h плоскости w_1 в полосу шириной π плоскости w_2 .

Наконец, при помощи третьей вспомогательной функции $w = e^{i\alpha} w_2$ отображаем горизонтальную полосу плоскости w_2 шириной π , опирающуюся на вещественную ось, на всю верхнюю полуплоскость плоскости w . Окончательно находим искомое отображение

$$w = e^{\frac{\pi}{h}} e^{-i\alpha} z = e^{\frac{\pi}{h}} (\cos \alpha - i \sin \alpha) z$$

5. Отобразить на верхнюю полуплоскость изображенную на рис. 20 горизонтальную полуполосу.

Решение. При помощи вспомогательной функции $w_1 = z - 1 - i$ сдвигаем полосу вниз и влево, чтобы совместить ее нижнюю границу с вещественной положительной полуосью, а ограничивающий полуполосу слева отрезок прямой, соединяющий точки $z' = 1 + i$ и $z'' = 1 + 3i$, — с отрезком $[0, 2i]$ мнимой оси.

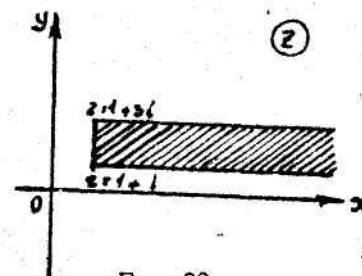


Рис. 20

При помощи второй вспомогательной функции $w_2 = \frac{\pi}{2} w_1$ преобразуем полуполосу шириной в две единицы в полосу шириной π , опирающуюся на положительную вещественную полуось плоскости w_2 .

Наконец, при помощи третьей вспомогательной функции $w = ch w_2$ отображаем полуполосу плоскости w_2 на всю верхнюю полуплоскость плоскости w (см. выше отображение, осуществляемое функцией $w = ch z$).

Окончательно функция, осуществляющая искомое отображение, будет иметь следующий вид:

$$w = ch \left[\frac{\pi}{2} (z - 1 - i) \right] = -ish \left[\frac{\pi}{2} (z - 1) \right].$$

6. Отобразить на верхнюю полуплоскость часть плоскости, лежащую вне двух касающихся окружностей (рис. 21).

Решение. Подберем такое дробно-линейное преобразование, которое отобразило бы обе окружности в прямые. Для этого достаточно отобразить точку $z' = 0$ в точку $w_1' = \infty$. Кроме того, если мы отобразим точку $z'' = -2$ в точку $w_1'' = 0$, а точку $z''' = -1 + i$ — в точку $w_1''' = 1$, то левая полуокружность отобразится в вещественную ось плос-

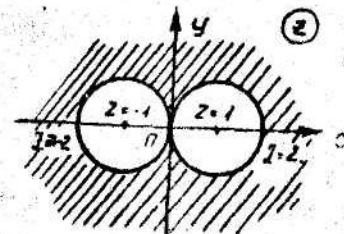


Рис. 21

кости w_1 . Таким преобразованием будет преобразование

$$w_1 = i \frac{z+2}{z}.$$

Поскольку точка касания окружностей отображена в бесконечно удаленную точку, вторая (правая) окружность отображается в прямую, параллельную вещественной оси плоскости w_1 ; поскольку точка $z=2$ этой окружности отображается в точку

$$w_1 = 2i, \text{ этой прямой будет прямая } \operatorname{Im} w_1 = 2.$$

Следовательно, вся область плоскости z , лежащая вне заданных окружностей, отображится (если учесть направление обхода границы) в горизонтальную полосу плоскости w_1 шириною в две единицы, опирающуюся на вещественную ось. Чтобы осуществить искомое отображение на верхнюю полуплоскость, остается увеличить ширину полосы до π при помощи преобразования $w_2 = \frac{\pi}{2} w_1$.

и отобразить полученную полосу на всю верхнюю полуплоскость при помощи преобразования $w = e^{w_2}$.

Окончательно искомое преобразование осуществляется при помощи функции $w = e^{\pi i \frac{z+2}{z}}$, а также всякой функцией $w = \frac{az+b}{cw+d}$ при вещественных a, b, c, d и при $ad-bc > 0$.

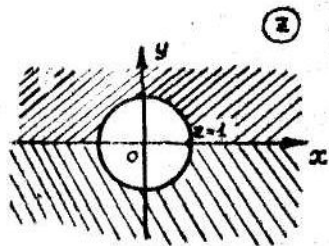


Рис. 22

7. Отобразить на верхнюю полуплоскость часть плоскости, лежащую вне окружности $|z|=1$ с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси от точки $z=1$ до $z=\infty$ (рис. 22).

Решение. При помощи функции $w_1 = \sqrt{z}$ отображаем заданную область на часть верхней полуплоскости плоскости w_1 , лежащую вне окружности $|w_1|=1$.

Затем, аналогично примеру 1, подбираем дробно-линейное преобразование $w_2 = f(w_1)$, которое отобразило бы лежащие на окружности $|w_1|=1$ точки $w_1'=-1$, $w_1''=i$, $w_1'''=1$ соответственно в точки $w_2'=0$, $w_2''=1$, $w_2'''=\infty$, а всю полуокружность — в вещественную положительную полуось плоскости w_2 ; таким преобразованием будет преобразование

$w_2 = i \frac{w_1+1}{w_1-1}$. Это преобразование отображает часть вещественной оси плоскости, лежащую вне отрезка $[-1, 1]$, на

всю положительную мнимую полуось плоскости w_2 ; поэтому интересующая нас область плоскости w_1 отобразится на первую четверть плоскости w_2 .

Наконец, преобразование $w = w_2^2$ отобразит первую четверть плоскости w_2 на верхнюю полуплоскость плоскости w .

Окончательно приходим к следующему виду искомого преобразования (одному из бесчисленного множества возможных):

$$w = -\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

(Варианты 1–30)

Задача № 1

Выполнить указанные действия над данными комплексными

11	$-4-4i$	$3+2i$	$z_1^2 \bar{z}_2$	$\frac{z_2}{z_1}$	$\sqrt[3]{z_1^3}$
12	$-3+3i$	$2+i$	z_2^3	$\frac{z_1^2}{z_2}$	$\sqrt[3]{z_1}$
				z_1	$\sqrt{\quad}$

24	$2+i$	$1-2i$	$z_1 \bar{z}_2^2$	$(\frac{\bar{z}_1}{z_2})^2$	$\sqrt[4]{\frac{z_1}{z_2}}$
25	$3+i$	$1-3i$	$z_1^2 \bar{z}_2$	$\frac{\bar{z}_2}{z_1}$	$\sqrt{z_1 \bar{z}_2}$
26	$7+i$	$1+7i$	$z_1 \bar{z}_2$	$(\frac{z_2}{z_1})^2$	$\sqrt[4]{\frac{z_1}{z_2}}$
27	$1-2i$	$4-2i$	$z_1^2 z_2^2$	$\frac{z_1}{z_2}$	$\sqrt[3]{\frac{z_2}{z_1}}$
28	$3-4i$	$-4+3i$	$(\bar{z}_1 \bar{z}_2)^2$	$\frac{z_2}{\bar{z}_1}$	$\sqrt{z_1 z_2}$
29	$4+4i$	$2-2i$	$z_1 z_2^2$	$\frac{z_1^2}{\bar{z}_2}$	$\sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2}}$
30	$1+i\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}+2i$	$z_1^2 \bar{z}_2$	$(\frac{z_2}{z_1})^2$	$\sqrt[4]{z_2}$

Задача № 2

а) Построить область плоскости z , определяемую данными неравенствами. Границы, принадлежащие области, изобразить сплошными линиями, не принадлежащие — пунктирными.

б) Найти область плоскости w , в которую отображается с помощью данной функции $w=f(z)$ заданная область D плоскости z .

Вариант	а)	б) $w=f(z)$	Область D
1	$\begin{cases} z-1 > 1 \\ z+1 > 1 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$0 < \operatorname{Im} z \leq \sqrt{\operatorname{Re} z}$

2	$\begin{cases} z-2 > 2 \\ z-4 \leq 4 \end{cases}$	$w = -\frac{\sqrt{z}}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \neq 1 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} z-1 > 2 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Re} z < 3 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Re} z \leq \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + 1} \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} z-2 \leq 1 \\ \operatorname{Re} z > 1,5 \\ \operatorname{Im} z \geq -0,5 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} z - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} z \geq 1 \\ z+\sqrt{2} + z-\sqrt{2} < 2\sqrt{3} \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$	$w = \frac{2}{z}$	$\begin{cases} z+1 \geq 1 \\ \operatorname{Re} z \leq 0 \\ \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} z-1 \leq 1 + \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Re} z < 2 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} z+i \geq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \\ \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} z+2 - z-2 \geq 2\sqrt{3} \\ \operatorname{Re} z < 3 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3} \\ \operatorname{Re} z \leq 4 \end{cases}$
8	$\begin{cases} z-2 \leq 2 \\ z-1 > 1 \\ z-3 \geq 1 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$0 \leq \operatorname{Re} z \leq \sqrt{\operatorname{Im} z}$
9	$\begin{cases} z+2 - z-2 \leq 2\sqrt{3} \\ 0 \leq \arg z < \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$w = \frac{2}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geq -1 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$

10	$\begin{cases} z-i \geq 1 + \operatorname{Im} z > 0 \\ -2 \leq \operatorname{Re} z < 2 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Im} z \geq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + 1} \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} z-1-i < \sqrt{2} \\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geq 1 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} z \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$

17	$\begin{cases} z^2-1 \leq 1 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$	$w = -\frac{1}{z}$	$\begin{cases} -\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + 1} \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Re} z \leq 0 \end{cases}$
18	$\begin{cases} z-1-i \geq 1 \\ z-1+i \geq 1 \\ z-1 < 1 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} z \geq 1 \\ \operatorname{Re} z \leq 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$

10	$\begin{cases} z-i \geq 1 + \operatorname{Im} z > 0 \\ -2 \leq \operatorname{Re} z < 2 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Im} z \geq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + 1} \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} z-1-i < \sqrt{2} \\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geq 1 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} z \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} z+\sqrt{2} - z-\sqrt{2} < 2 \\ z-1 \leq 1 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} z-1 \leq 1 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 0 \leq z+\sqrt{2} - z-\sqrt{2} \leq 2 \\ z+\sqrt{3} + z-\sqrt{3} < 4 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} z-1 \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \leq 1 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} z-i < \operatorname{Im} z + 1 \\ z+2 + z-2 \geq 2\sqrt{5} \\ \operatorname{Im} z \leq 2 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 4 \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} z+\sqrt{2} - z-\sqrt{2} \leq 2 \\ z-1 < 1 + \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$	$w = -\frac{1}{z}$	$-\sqrt{\operatorname{Re} z} \leq \operatorname{Im} z < 0$
16	$\begin{cases} z-i \leq 1 + \operatorname{Im} z \\ \arg z \leq \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{Im} z \leq 2 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{2} \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$

17	$\begin{cases} z^2-1 \leq 1 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$	$w = -\frac{1}{z}$	$\begin{cases} -\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + 1} \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Re} z \leq 0 \end{cases}$
18	$\begin{cases} z-1-i \geq 1 \\ z-1+i \geq 1 \\ z-1 < 1 \end{cases}$	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} z \geq 1 \\ \operatorname{Re} z \leq 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} z-1 > 1 + \operatorname{Re} z \\ z+1 + z-1 \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} z-i \geq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
20	$\begin{cases} z^2-1 \geq 1 \\ z-\sqrt{2} < 2 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} z-i \geq 1 \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$
21	$\begin{cases} z-i < 1 + \operatorname{Im} z \\ z+i\sqrt{2} - z-i\sqrt{2} \leq 2 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} 4 \leq \operatorname{Re} z \leq 9 \\ -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 2 \end{cases}$
22	$\begin{cases} z\bar{z} ^2 > \operatorname{Re}(z^2) \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \\ z-1 \leq 1 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 4 \\ -8 \leq \operatorname{Im} z \leq 8 \end{cases}$
23	$\begin{cases} z-1 \leq 1 + \operatorname{Re} z \\ z+1 + z-1 > 2\sqrt{2} \end{cases}$	$w = -\frac{1}{z}$	$0 \leq \operatorname{Re} z \leq \sqrt{\operatorname{Im} z}$

24	$\begin{cases} z+i\sqrt{5} - z-i\sqrt{5} < 4 \\ \operatorname{arctg} 2 < \arg z < \pi - \operatorname{arctg} 2 \end{cases}$	$w = -\frac{1}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geq -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} z\bar{z} ^2 < \operatorname{Im}(z^2) \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$w = \frac{2}{z}$	$\begin{cases} -\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + 1} \leq \operatorname{Im} z < 0 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$

Задача № 3

Вычислить значения данных функций $f(z)$ при указанных значениях комплексной переменной z .

Вариант	a) $f(z)$	z	б) $f(z)$	z
	$\ln z$	$\frac{\pi}{2} + i$	$\ln z$	$2-3i$

24	$\begin{cases} z+i\sqrt{5} - z-i\sqrt{5} \geq 4 \\ \operatorname{arctg} 2 < \arg z < \pi - \operatorname{arctg} 2 \end{cases}$	$w = -\frac{1}{z}$	$\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geq -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} z\bar{z} ^2 < \operatorname{Im}(z^2) \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$w = \frac{2}{z}$	$\begin{cases} -\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + 1} \leq \operatorname{Im} z < 0 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$
26	$ z - 2 \leq \operatorname{Re} z < 2 - z $	$w = \frac{1}{z}$	$\begin{cases} z - \frac{i}{2} \geq \frac{1}{2} \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$
27	$\begin{cases} z+i\sqrt{3} - z-i\sqrt{3} \geq 2\sqrt{2} \\ z+i\sqrt{3} + z-i\sqrt{3} < 4 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} z+1 \leq 1 \\ \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$
28	$\begin{cases} z-1-i \leq 1 \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 2 \\ \arg z > \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2 \end{cases}$
29	$\begin{cases} z\bar{z} ^2 \geq 2\operatorname{Im}(z^2) \\ z-1-i < 1 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 4 \end{cases}$
30	$\begin{cases} z+i\sqrt{3} + z-i\sqrt{3} \geq 4 \\ z < 2 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$	$w = \sqrt{z}$	$\begin{cases} -4 \leq \operatorname{Re} z \leq 4 \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 8 \end{cases}$

Задача № 3

Вычислить значения данных функций $f(z)$ при указанных значениях комплексной переменной z .

Вариант	a) $f(z)$	z	б) $f(z)$	z
1	$\operatorname{tg} z$	$\frac{\pi}{4} + i$	$\operatorname{Ln} z$	$2-3i$
2	$\operatorname{ch} z$	$2 - \frac{\pi i}{2}$	e^z	$2 + \frac{\pi i}{3}$
3	$\sin z$	$\frac{\pi}{3} + 2i$	$\operatorname{Ln} z$	$3-4i$
4	$\operatorname{th} z$	$1 - \frac{\pi i}{2}$	e^z	$-1 - \frac{2\pi i}{3}$
5	$\cos z$	$\frac{\pi}{6} + i$	$\operatorname{Ln} z$	$-3+i$
6	$\operatorname{sh} z$	$1 + \frac{\pi i}{4}$	e^z	$0,5 + \pi i$
7	$\operatorname{ctg} z$	$\frac{\pi}{3} - i$	$\operatorname{Ln} z$	$-2-2i$
8	$\operatorname{ch} z$	$1 + \frac{\pi i}{4}$	e^z	$-0,5 - \frac{\pi i}{2}$
9	$\sin z$	$\frac{\pi}{2} + i$	$\operatorname{Ln} z$	$-5+12i$
10	$\operatorname{cth} z$	$-1 + \frac{\pi i}{3}$	e^z	$-1 + \frac{\pi i}{3}$
11	$\cos z$	$\frac{\pi}{2} + 3i$	$\operatorname{Ln} z$	$-4-3i$

63

62

12	$\operatorname{sh} z$	$2 - \frac{\pi i}{2}$	e^z	$1 - \frac{\pi i}{4}$
13	$\operatorname{tg} z$	$\frac{\pi}{6} + 2i$	$\operatorname{Ln} z$	$-3-3i$
14	$\operatorname{sh} z$	$2 + \frac{\pi i}{4}$	e^z	$-0,5 + \frac{3}{4}\pi i$

25	$\operatorname{cth} z$	$2 - \pi i$	$\operatorname{Ln} z$	$5-12i$
26	$\sin z$	$\frac{\pi}{4} + i$	e^z	$2 + \frac{\pi i}{3}$
27	$\operatorname{sh} z$	$2 + \frac{\pi i}{4}$	$\operatorname{Ln} z$	$24-7i$

12	shz	$2 - \frac{\pi i}{2}$	e^z	$1 - \frac{\pi i}{4}$
13	tgz	$\frac{\pi}{6} + 2i$	lnz	$-3 - 3i$
14	shz	$2 + \frac{\pi i}{4}$	e^z	$-0.5 + \frac{3}{4}\pi i$
15	$cosz$	$\frac{\pi}{2} + 3i$	lnz	$2 - 4i$
16	$cthz$	$1 - \frac{\pi i}{4}$	e^z	$0.1 + \frac{\pi i}{2}$
17	$sinz$	$\frac{\pi}{6} - i$	lnz	$-3 + i$
18	chz	$2 - \frac{\pi i}{6}$	e^z	$2(1+i)$
19	thz	$1 + \frac{\pi i}{3}$	lnz	$\frac{1+i}{1-i}$
20	$sinz$	$\frac{\pi}{2} + 2i$	e^z	$\frac{\pi(1-i)}{2}$
21	chz	$2 - \pi i$	lnz	$\frac{2-i}{2+i}$
22	$ctgz$	$\frac{\pi}{4} + 2i$	e^z	$-\frac{\pi}{2}(1+2i)$
23	shz	$\frac{1+\pi i}{2}$	lnz	$\frac{1+2i}{-1+2i}$
24	$cosz$	$\frac{\pi+2i}{2}$	e^z	$-1 - \frac{3}{4}\pi i$

64

25	$cthz$	$2 - \pi i$	lnz	$5 - 12i$
26	$sinz$	$\frac{\pi}{4} + i$	e^z	$2 + \frac{\pi i}{3}$
27	shz	$2 + \frac{\pi i}{4}$	lnz	$24 - 7i$
28	$ctgz$	$\frac{\pi}{2} + 2i$	e^z	$-2 + \frac{\pi i}{6}$
29	chz	$1 - \frac{\pi i}{3}$	lnz	$3 + 4i$
30	$cosz$	$\frac{\pi}{3} - i$	e^z	$1.5 + \frac{\pi i}{2}$

Задача № 4

Проверить регулярность функции $w=f(z)$ и найти ее производную $f'(z)$ (в случае регулярности).

Вариант	$f(z)$	Вариант	$f(z)$
1	$\frac{1}{1+z}$	5	$ch(\bar{z}-2)$
2	$\sin(z + \frac{\pi}{4})$	6	$ln(1+\bar{z})$
3	$ln(1+z)$	7	$sh(z+1)$
4	$\frac{1}{1+\bar{z}}$	8	e^{1+z}

65

Задача № 5

Проверить, может ли функция $u(x,y)/v(x,y)$ быть вещественной (минимой) частью регулярной функции $f(z)$ и если может, то восстановить эту функцию.

1	$u(x,y) = \sin y \operatorname{ch} x$	14	$v(x,y) = \operatorname{sh} 3x \sin 3y$
---	---------------------------------------	----	---

9	$e^{\bar{z}^2}$	20	$ln \frac{\bar{z}}{z}$
10	$\cos(z - \frac{\pi}{4})$	21	$z^2 + \bar{z}^2$
11	$e^{\bar{z}-1}$	22	$z + \frac{1}{\bar{z}}$

Проверить, может ли функция $u(x, y) / v(x, y)$ быть вещественной (мнимой) частью регулярной функции $f(z)$ и если может, то восстановить эту функцию.

9	$e^{\bar{z}^2}$	20	$\ln \frac{\bar{z}}{z}$
10	$\cos(z - \frac{\pi}{4})$	21	$z^2 + \bar{z}^2$
11	$e^{\bar{z}-1}$	22	$z + \frac{1}{z}$
12	$\frac{1}{1-z}$	23	$\bar{z} + \frac{1}{z}$
13	$\ln(\bar{z}-1)$	24	$z\bar{z}$
14	e^{z^2}	25	$\frac{\bar{z}}{z}$
15	$(z+1)^2$	26	$\sin 2z$
16	$1 + \frac{1}{z}$	27	$\operatorname{ch} \frac{z}{2}$
17	$\frac{1}{\bar{z}-1}$	28	$\ln(z-1)$
18	$(1+\bar{z})^3$	29	$1 - \frac{1}{z}$
19	$\sin(2\bar{z} + \frac{\pi}{4})$	30	$\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}$

1	$u(x, y) = \sin y \operatorname{ch} x$	14	$v(x, y) = \operatorname{sh} 3x \sin 3y$
2	$v(x, y) = \cos y \operatorname{ch} x$	15	$u(x, y) = e^{2y} \sin 2x$
3	$v(x, y) = e^x \operatorname{ch} y$	16	$v(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$
4	$u(x, y) = e^{-x} \sin y$	17	$u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
5	$v(x, y) = e^y \sin x$	18	$v(x, y) = -\ln(x^2 + y^2)$
6	$u(x, y) = -e^{-y} \cos x$	19	$v(x, y) = x^3 - 3xy^2$
7	$u(x, y) = e^y \operatorname{sh} x$	20	$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$
8	$v(x, y) = \operatorname{sh} y \sin x$	21	$v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
9	$v(x, y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$	22	$v(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$
10	$u(x, y) = -\operatorname{sh} x \sin y$	23	$u(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
11	$u(x, y) = e^{-2x} \sin 2y$	24	$u(x, y) = 3x^2y - y^3$
12	$v(x, y) = \operatorname{sh} 2x \cos 2y$		
13	$v(x, y) = \operatorname{ch} 2x \cos 2y$		

25	$u(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$	28	$u(x, y) = \operatorname{sh} \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2}$
26	$v(x, y) = e^{2x} \cos 2y$	29	$u(x, y) = e^{x-y}$
27	$v(x, y) = -e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{y}{2}$	30	$v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$

6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2/3)^n (z-1+i)^n}{n + \sin \frac{n\pi}{2}}$	$z=0; z=\frac{5}{2}-i; z=1+\frac{i}{2}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{(z+2i)^{2n}}{\sqrt{n+2}n}$	$z=0; z=\frac{2}{\sqrt{3}}-2i; z=(\frac{2}{\sqrt{3}}-2)i$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2i)^n (n+1 + \operatorname{arctan} n)}$	$z=0; z=3i; z=2+i$

25	$u(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$	28	$u(x,y) = \operatorname{sh} \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2}$
26	$v(x,y) = e^{2x} \cos 2y$	29	$u(x,y) = e^{x-y}$
27	$v(x,y) = -e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{y}{2}$	30	$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

Задача № 6

Найти круг сходимости данного степенного ряда и исследовать сходимость в заданных точках ("сходится абсолютно", "сходится условно", "расходится").

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n-1}}{2^n(n+\ln n)}$	$z=2i; z=3i; z=\sqrt{2}+i$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{2n}}{3^n(n^2+n\ln n)}$	$z=0; z=\sqrt{3}-1+i; z=2+i$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{2^n(n+1)\ln(n+1)}$	$z=0; z=3+i; z=1+3i$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^{2n-1}}{(n+1)^2 \ln(n+1)}$	$z=0; z=3i; z=1+2i$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-2i)^n}{2^n(n+1)\ln^2(n+1)}$	$z=0; z=1+2i; z=-1$

68

16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2+2i)^n}{3^n\sqrt{n^3+1}}$	$z=0; z=2+i; z=-1-3i$
17	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z+1+i)^{2n}}{9^n\sqrt{n+1}}$	$z=0; z=2-i; z=-1+2i$

6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2/3)^n (z-1+i)^n}{n+\sin \frac{n\pi}{2}}$	$z=0; z=\frac{5}{2}-i; z=1+\frac{i}{2}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{3}{4})^n (z+2i)^{2n}}{\sqrt{n+2n\ln n}}$	$z=0; z=\frac{2}{\sqrt{3}}-2i; z=(\frac{2}{\sqrt{3}}-2)i$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2i)^n(n+1+\arctan n)}$	$z=0; z=3i; z=2+i$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1+2i)^{2n}}{(4i)^n(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	$z=0; z=1-2i; z=-1$
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2+i)^{2n+1}}{3^n[(n+1)^2+\ln^2(n+1)]}$	$z=0; z=2+\sqrt{2}; z=2+i(\sqrt{3}-1)$
11	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-2i)^n}{(2i)^n\sqrt{(n+1)^3+2n\ln n}}$	$z=0; z=1+2i; z=-1+4i$
12	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2})^n (z-2i)^n}{n+1+\sin n\pi}$	$z=1; z=\frac{2}{3}+2i; z=\frac{8}{3}i$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n (z+1)^{2n}}{\sqrt{n+1+\arcsin \frac{1}{n}}}$	$z=0; z=-1+\frac{i}{\sqrt{2}}; z=-\frac{3}{2}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (z+3i)^n}{3^n(n^2+1)}$	$z=0; z=3-3i; z=i$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1+i)^{2n}}{4^n n \sqrt{n+1}}$	$z=0; z=3-i; z=1+i$

69

26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1) (z-2)^{2n}}{2^n(1+\sin^2 n\pi)}$	$z=0; z=2+\sqrt{2}; z=2+i$
27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\ln n) (z-1+i)^{2n}}{2^n}$	$z=0; z=1; z=1+\sqrt{2}-i$

16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2+2i)^n}{3^n \sqrt{n^3+1}}$	$z=0; z=2+i; z=-1-3i$
17	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1+i)^{2n}}{9^n \sqrt{n+1}}$	$z=0; z=2-i; z=-1+2i$
18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i\sqrt{2})^{2n}}{2^n \sqrt[3]{n^2+n\ln n}}$	$z=0; z=\sqrt{2}(1+i); z=1$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i\sqrt{3})^{2n-1}}{3^n (n+1) \ln^{3/2}(n+1)}$	$z=0; z=\sqrt{3}(1-i); z=-1$
20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1+i)^{2n-1}}{2^n (n+1) \ln(n+1)}$	$z=0; z=1+i; z=1-2i$
21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (z+1+\frac{i}{2})^n}{2^n (n+1) \sqrt{\ln(n+1)}}$	$z=0; z=-1+\frac{3}{2}i; z=1-\frac{i}{2}$
22	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2+3i)^{2n}}{4^n [n+1+\ln^2(n+1)]}$	$z=2-i; z=4-3i; z=1-2i$
23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-2i)^{2n-1}}{5^n (n+1) \ln^3(n+1)}$	$z=0; z=1+i; z=1$
24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2+2i)^n}{3^n (1+\frac{1}{n})^n}$	$z=0; z=-1-2i; z=5-i$
25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n^2 (z+3-i)^n}{3^n \ln(n+1)}$	$z=0; z=-3-2i; z=-1+i$

70

26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1) (z-2)^{2n}}{2^n (1+\sin^2 n\alpha)}$	$z=0; z=2+\sqrt{2}; z=2+i$
27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\ln n) (z-1+i)^{2n}}{2^n}$	$z=0; z=1; z=1+\sqrt{2}-i$
28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \ln(n+1) (z-1)^{2n-1}}{3^n}$	$z=1+\sqrt{3}; z=1+i\sqrt{3}; z=0$
29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+2i)^n 2^{2n}}{3^n (n+\sqrt{n})}$	$z=0; z=\frac{3}{4}-2i; z=-\frac{5}{4}i$
30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (z-i\sqrt{2})^{2n}}{2^n \sqrt{n^2+1}}$	$z=0; z=2i\sqrt{2}; z=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

Задача № 7

Найти все разложения функции $f(z)$ по степеням указанной разности $z-z_0$. Указать область пригодности найденных разложений. Сделать поясняющий чертеж.

Вариант	$f(z)$	$z-z_0$
1	$\frac{1}{z^2(z-1)}$	$z-1$
2	$\frac{z}{z^2-5z+4}$	$z-2$

71

3	$\frac{z+2}{(z^2+2z+5)^2}$	$z+1$
4	$\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{4}}$	$z-\frac{\pi}{4}$

13	$\frac{\cos z}{(z+\frac{\pi}{4})^2}$	$z+\frac{\pi}{4}$
14	$(z-1)^2 \sin^2 \frac{1}{z-1}$	$z-1$
15	$\frac{\sin z}{z}$	$z-\frac{3\pi}{2}$

3	$\frac{z+2}{(z^2+2z+5)^2}$	$z+1$
4	$\frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{4}}$	$z - \frac{\pi}{4}$
5	$\frac{z-1}{\sqrt[3]{z^3-3z^2+3z}} \quad *)$	$z-1$
6	$\frac{1}{z(z^2-1)}$	$z+1$
7	$\frac{z+4}{(z^3+6z^2+12z)^2}$	$z+2$
8	$\frac{1}{\sqrt[3]{(16-12z+6z^2-z^3)^2}} \quad *)$	$z-2$
9	$\frac{z}{(z^2-4)^2}$	$z-2$
10	$\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$	z
11	$\operatorname{arctg} z \quad **)$	z
12	$\frac{1}{(z+1)(z+2)^3}$	$z+1$
72		

13	$\frac{\cos z}{(z + \frac{\pi}{4})^2}$	$z + \frac{\pi}{4}$
14	$(z-1)^2 \sin^2 \frac{1}{z-1}$	$z-1$
15	$\frac{\sin z}{(z - \frac{3\pi}{4})^3}$	$z - \frac{3\pi}{4}$
16	$(\frac{\sin z}{z})^3$	z
17	$\frac{z}{\sqrt[3]{z^3+3z^2+3z}} \quad *)$	$z+1$
18	$\frac{z}{(z^2-1)^3}$	$z+1$
19	$\frac{\sqrt[3]{7+3z-3z^2+z^3}}{z-1} \quad *)$	$z-1$
20	$\frac{1}{z(z^2-4)}$	$z+2$
21	$\frac{\sin^2 z}{(z - \frac{\pi}{8})^2}$	$z - \frac{\pi}{8}$
22	$\frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$	z
23	$\frac{\cos^2 z}{(z + \frac{\pi}{8})^2}$	$z + \frac{\pi}{8}$

73

24	$\frac{1}{(z+1)(z^2-4)}$	z
25	$\frac{1}{1+z+z^2}$	z
26	$\frac{1}{z+1} \cos^2 \frac{1}{z+1}$	$z+1$

Задача № 8

Для функции $f(z)$ найти все изолированные особые точки, классифицировать их и найти вычеты в них (включая бесконечно удаленную точку).

Вариант	$f(z)$	Вариант	$f(z)$
1	$\frac{e^z}{z^2}$	9	$z^3 e^{-\frac{1}{z^2}}$

24	$\frac{1}{(z+1)(z^2-4)}$	z
25	$\frac{1}{1+z+z^2}$	z
26	$\frac{1}{z+1} \cos^2 \frac{1}{z+1}$	$z+1$
27	$\left(\frac{\cos z}{z}\right)^3$	z
28	$\frac{1}{1-z+z^2}$	z
29	$\frac{z+2}{(z^3+3z^2+3z)^2}$	$z+1$
30	$\frac{z}{(z^2-2z)^3}$	$z-1$

* Под корнем 3-й степени понимается то из его значений, которое на вещественной положительной полуоси вещественно.

** Воспользоваться формулами:

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}; \quad \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Для функции $f(z)$ найти все изолированные особые точки, классифицировать их и найти вычеты в них (включая бесконечно удаленную точку).

Вариант	$f(z)$	Вариант	$f(z)$
1	$\frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$	9	$z^3 e^{-\frac{1}{z^2}}$
2	$\frac{\operatorname{sh} z}{(z^2+\pi^2)^2}$	10	$z^3 \cos \frac{1}{z^2}$
3	$\frac{\sin z}{(z^2-\pi^2)^2}$	11	$z^5 \sin \frac{1}{z^2}$
4	$\frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+\pi^2)^3}$	12	$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$
5	$\frac{\cos z}{(z^2-\pi^2)^3}$	13	$\frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z}$
6	$\frac{z^2+4}{(z^2+3z+2)^2}$	14	$\frac{1}{1+z} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$
7	$\frac{(z+1)^2}{(z^2-3z+2)^2}$	15	$\frac{1}{(1-z)^2} e^{\frac{1}{z}}$
8	$\frac{e^{iz}}{(z^2-\pi^2)^2}$	16	$\frac{1}{1-z^2} e^{\frac{1}{z}}$
		17	$\frac{1}{1+z^2} \sin \frac{1}{z}$

18	$\frac{z}{1-z^2} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$	25	$\frac{1}{1+z^2} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$
19	$\frac{z}{1+z^2} \cos \frac{1}{z}$	26	$\frac{z}{1-z} \sin \frac{1}{z}$
	$\frac{1}{1-z} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$	27	$\frac{1}{1-z} \cos \frac{1}{z}$

2	$\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)^3}$	$ z-1 =1$
3	$\oint_C \frac{z^2+1}{z^3+1} dz$	$ z =2$
4	$\oint z^2 e^{-\frac{1}{z}} dz$	$ z =1$

18	$\frac{z}{1-z^2} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$	25	$\frac{1}{1+z^2} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$
19	$\frac{z}{1+z^2} \cos \frac{1}{z}$	26	$\frac{z}{1-z} \sin \frac{1}{z}$
20	$\frac{1}{(1-z)^2} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$	27	$\frac{1}{z(1+z)} \cos \frac{1}{z}$
21	$\frac{1}{(1+z)^2} \cos \frac{1}{z}$	28	$\frac{z}{1+z} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$
22	$\frac{1}{(1-z)^2} \sin \frac{1}{z}$	29	$\frac{1}{z(1-z)} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$
23	$\frac{1}{z(1-z^2)} \cos \frac{1}{z}$	30	$\frac{z}{1+z} e^{-\frac{1}{z}}$
24	$\frac{1}{z(1+z^2)} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$		

Задача № 9

Вычислить данный интеграл по указанному контуру C , применяя теорему о вычетах (в вариантах 1-15) или интегральную формулу Коши, или ее следствие — формулу n -й производной (в вариантах 16-30).

Вариант	Интеграл	Контур C
1	$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$	$ z+i =1$

76

12	$\oint_C \frac{\ln z \, dz}{(z^2+1)^2}$	$ z-i =\frac{1}{2}$
13	$\oint_C \frac{\ln(z+1) \, dz}{(z^2-1)^2}$	$ z-1 =1$
14	$\oint_C \frac{e^{-z} \, dz}{z}$	$ z-1 =2$

2	$\oint_C \frac{dz}{(z^2-1)^3}$	$ z-1 =1$
3	$\oint_C \frac{z^2+1}{z^3+1} \, dz$	$ z =2$
4	$\oint_C z^2 e^{-\frac{1}{z}} \, dz$	$ z =1$
5	$\oint_C z^2 \operatorname{sh} \frac{1}{z} \, dz$	$ z =2$
6	$\oint_C z \cos \frac{1}{z} \, dz$	$ z =2$
7	$\oint_C \frac{z^3+1}{(z^2+1)^2} \, dz$	$ z =2$
8	$\oint_C \frac{e^z \, dz}{(z^2-1)^2}$	$ z+1 =1$
9	$\oint_C \frac{e^{iz} \, dz}{z^2+1}$	$ z =2$
10	$\oint_C \frac{\operatorname{ch} z \, dz}{(z^2+\pi^2)^2}$	$ z-\pi i =\pi$
11	$\oint_C \frac{\sin z \, dz}{(z^2-\frac{\pi^2}{4})^2}$	$ z-\frac{\pi}{2} =1$

77

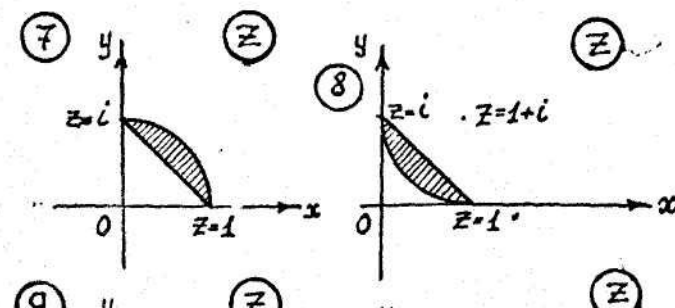
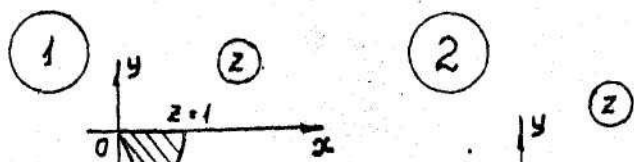
22	$\oint_C \frac{\operatorname{sh} z \, dz}{(z^2+\pi^2)^2}$	$ z-\pi i =\pi$
23	$\oint_C \frac{\sin^2 z \, dz}{(z^2-\frac{\pi^2}{4})^2}$	$ z+\frac{\pi}{2} =1$
24	$\oint_C \operatorname{tg} z \, dz$	$ z-\frac{\pi}{2} =1$

12	$\oint_C \frac{\ln z dz}{(z^2+1)^2}$	$ z-i = \frac{1}{2}$
13	$\oint_C \frac{\ln(z+1) dz}{(z^2-1)^2}$	$ z-1 = 1$
14	$\oint_C \frac{e^{-z} dz}{z(z-1)^3}$	$ z-1 = 2$
15	$\oint_C \frac{\cos z dz}{z^2(z-\pi)^2}$	$ z-\pi = 4$
16	$\oint_C \frac{(z+\alpha)^2 e^{iz} \sin \pi z dz}{z-\alpha}$	$ z-\alpha = 1$
17	$\oint_C \frac{z^3 dz}{(z+1)^3(z-2)}$	$ z-2 = 2$
18	$\oint_C \frac{(z^2+1) dz}{z^2(z+2)^2}$	$ z = 1$
19	$\oint_C \frac{z^3 dz}{(z-1)^3(z+2)}$	$ z-1 = 2$
20	$\oint_C \frac{e^{iz} z dz}{z^2+1}$	$ z-i = 1$
21	$\oint_C \frac{e^{-iz} (1-z^2) dz}{1+z^2}$	$ z+i = 1$

22	$\oint_C \frac{\operatorname{sh} z dz}{(z^2+\pi^2)^2}$	$ z-\pi i = \pi$
23	$\oint_C \frac{\sin^2 z dz}{(z^2 - \frac{\pi^2}{4})^2}$	$ z + \frac{\pi}{2} = 1$
24	$\oint_C \frac{\operatorname{tg} z dz}{(z - \frac{\pi}{4})^3}$	$ z - \frac{\pi}{4} = 0,5$
25	$\oint_C \frac{\operatorname{ch} \pi z dz}{(z^2+1)^3}$	$ z-i = 1$
26	$\oint_C \frac{\ln(1+z) dz}{(z^2-1)^3}$	$ z-1 = 1$
27	$\oint_C \frac{e^z \ln(z+\alpha) dz}{(z-\alpha)^2}$	$ z-\alpha = \alpha \quad (\alpha > 0)$
28	$\oint_C \frac{dz}{(z^4 - \alpha^4)^2}$	$ z-\alpha i = \alpha \quad (\alpha > 0)$
29	$\oint_C \frac{\operatorname{th} \frac{\pi z}{4} dz}{(z^2+1)^2}$	$ z-i = 0,5$
30	$\oint_C \frac{e^{iz} \cos z dz}{(z-\pi)^3}$	$ z-\pi = \pi$

Задача № 10

Найти регулярные функции, отображающие на верхнюю полу-
плоскость заштрихованную на рисунке область плоскости z
(рис. 23-26).



Найти регулярные функции, отображающие на верхнюю полу-
плоскость заштрихованную на рисунке область плоскости z
(рис. 23-26).

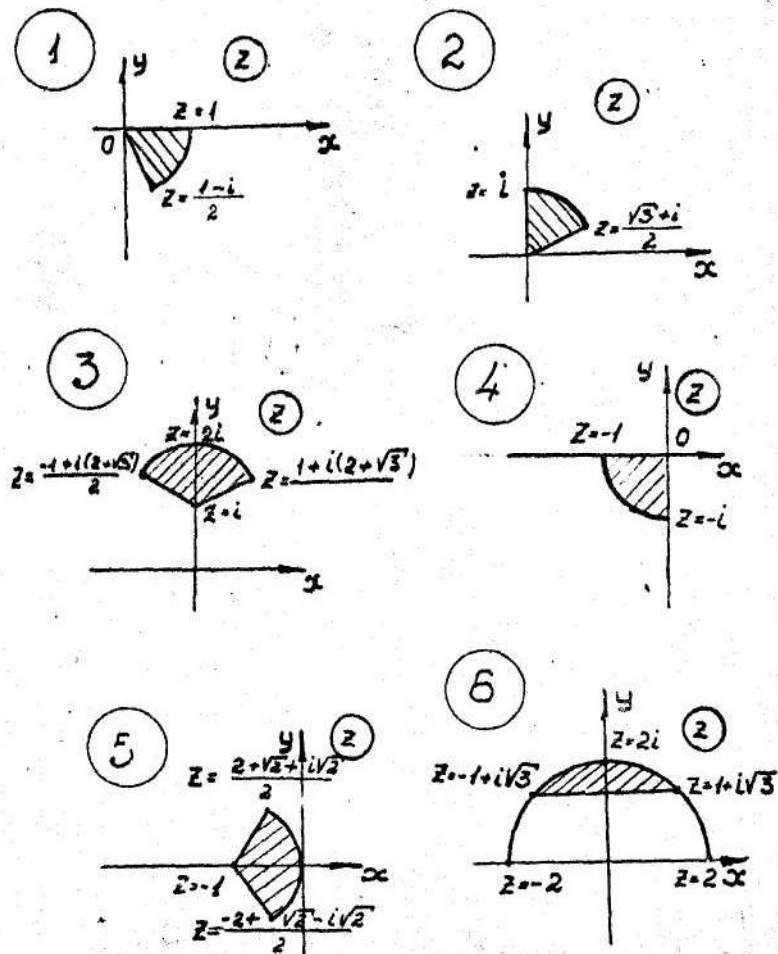


Рис. 23

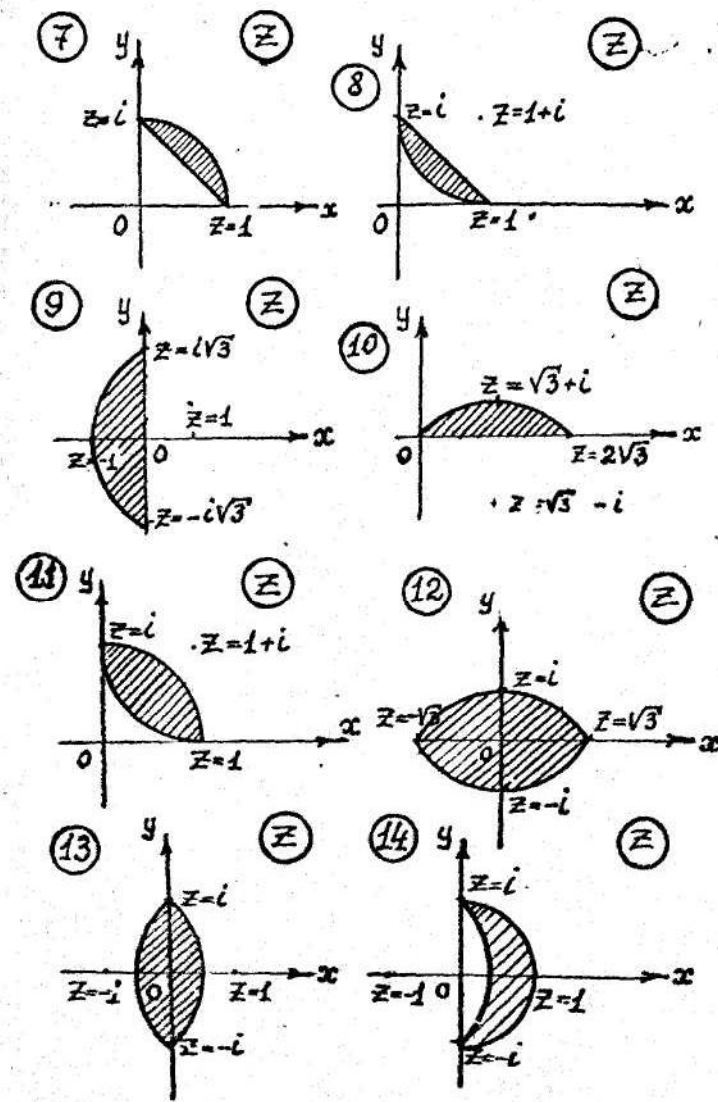
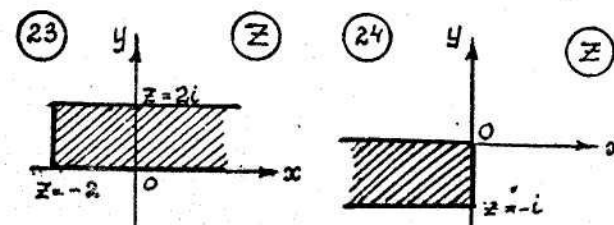
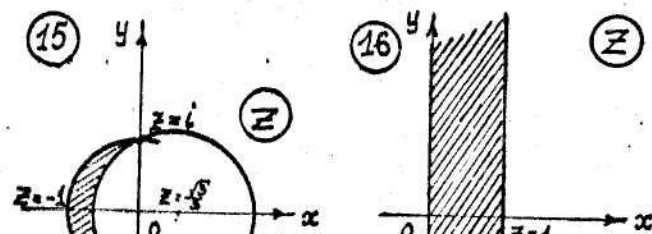


Рис. 24



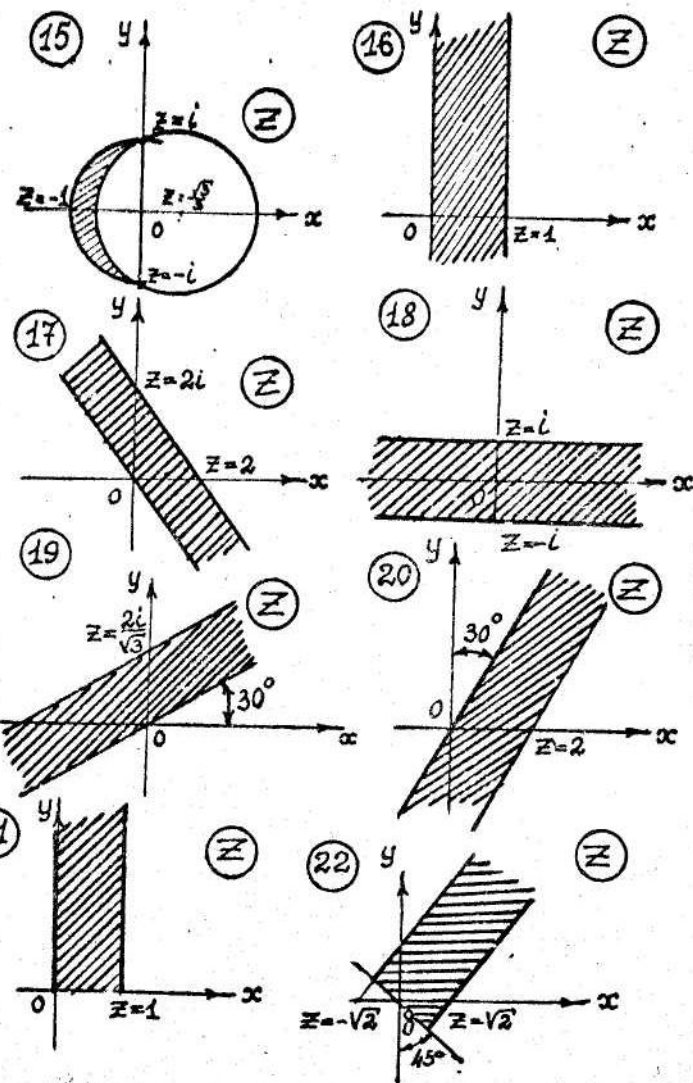


Рис. 25

Оглавление

Введение	3
§ 1. Действия над комплексными числами	5
§ 2. Геометрия на комплексной плоскости	8
§ 3. Вычисление значения функции комплексного переменного	12

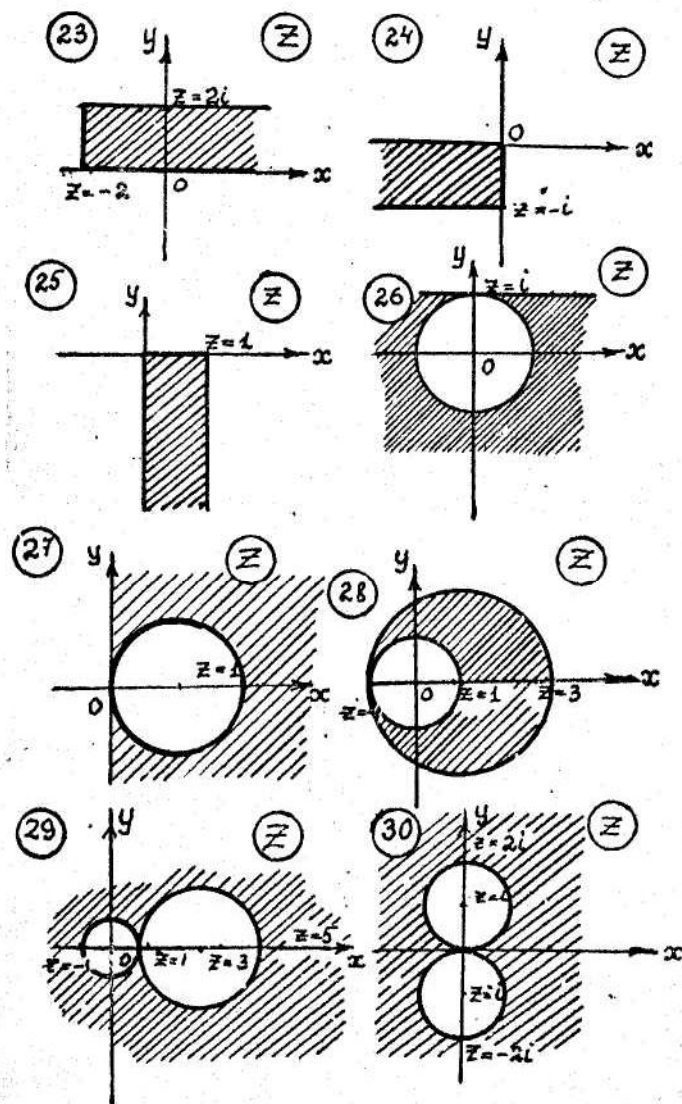


Рис. 26

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э. Баумана

Р.Я. Шостах, С.М. Коган, Т.А. Хереско

Оглавление

Введение	3
§ 1. Действия над комплексными числами	5
§ 2. Геометрия на комплексной плоскости	8
§ 3. Вычисление значения функции комплексного переменного	12
§ 4. Проверка регулярности заданной функции и отыскание ее производной	14
§ 5. Отыскание регулярной функции комплексного переменного по ее вещественной или мнимой части	17
§ 6. Определение круга сходимости степенного ряда	19
§ 7. Разложение функций в степенные ряды	24
§ 8. Особые точки и вычеты в них	31
§ 9. Вычисление интегралов от регулярных функций комплексного переменного по замкнутому контуру	40
§ 10. Конформное отображение	43
Домашнее задание (варианты 1-30)	56

Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище им. Н.Э. Баумана

Р.Я. Шостах, С.М. Коган, Т.А. Хереско

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ ПО ФУНКЦИЯМ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Под редакцией С.В. Фролова

Москва

1976